Algèbre linéaire L1, 2014-2015 Durée : 1h45 B. Calmès

Devoir surveillé

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones, et autres appareils électroniques. Toute réponse doit être prouvée.

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(1) $E = \{(x, y, z)$ t.q. $x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

(2) $F = \{(x, y, z)$ t.q. $x + y + -2z = 2\}$;

(3) $G = \{(x, y, z)$ t.q. $x + y - 2z = 0\}$;

(4) $H = \{(1, 1, 1)\} \cup \{(-1, -1, -1)\} \cup \{(0, 0, 0)\}$;

(5) $I = G \cup H$;

Exercice 2. Soit $W = V_1 \cap V_2$, où V_1 et V_2 sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \text{ t.q. } x + y + z + t = 0\}$$

et

$$V_2 = \{(x, y, z, t) \text{ t.q. } x - 2y + t = 0\}.$$

(1) W est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?

(2) En donner une base.

Exercice 3. Soit $l_A : X \mapsto AX$ l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Quel est son espace de départ, et quel est son espace d'arrivée ?

(2) Donner une base de son noyau.

(3) Quelle est la dimension de son image ?

(4) Est-elle surjective ?

(5) Donner une base de son image.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. On suppose que $f \circ f = 0$.

(1) Démontrer que $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(f)$.

(2) En déduire que le rang de f est inférieur ou égal à 1.

(3) Quand sera-t-il égal à 1 ?