Algèbre linéaire L1, 2015-2016 Durée : 1h30 B. Calmès

Devoir surveillé

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones, et autres appareils électroniques.
Sauf mention explicite du contraire, **toute réponse doit être prouvée**. Par exemple, la réponse "oui" ou "non" à la question (2) de l'exercice 2 n'est pas suffisante.

Tous les espaces vectoriels ci-dessous sont sur le corps $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 4.

(1) Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ dont la dérivée seconde est nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ (qu'on appellera V).

(2) Donner une base de V, et sa dimension.

(3) Donner une base de l'intersection de V et de
$$W = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(2) = 0\}.$$

(4) Compléter cette base de $W \cap V$ en une base de V, puis compléter cette dernière en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et ses sous-espaces vectoriels
$$F = \mathrm{Vec}\big((1,0,1),(0,2,3)\big) \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \mid x = y = z\}.$$
(On ne demande pas de justifier que ce sont bien des sous-espaces vectoriels.)

(1) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ (on ne demande pas de justification) et sa dimension.

(2) F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension $2n+1$ où $n \in \mathbb{N}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, tous deux de dimension $n+1$.

(1) Peut-on avoir $E = F + G$?

(2) Peut-on avoir $E = F \oplus G$?

(Pour les deux questions, fournir un exemple explicite ou prouver que ça n'est pas possible.)