Algèbre linéaire L1, 2014-2015 Durée : 2h B. Calmès

Correction de l'examen de première session

Exercice 1. (6 points)

(1) Quel que soit le vecteur $Y \in \mathbb{R}^3$, le système $AX = Y$, d'inconnue X ne peut avoir une unique solution. En effet, l'application linéaire

$$l_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

est de rang au plus 3, donc, par le théorème du rang, de noyau de dimension au moins $4 - 3 = 1$. Ainsi, soit l'ensemble des solutions est vide (si $Y \notin \mathrm{im}(A)$), soit il contient au moins une solution, disons Y_0 et dans ce cas, il en contient une infinité d'autres de la forme $Y_0 + X'$ avec $X' \in \ker(A)$.

(2) Les opérations sur les lignes effectuées pour obtenir une étape à partir de la précédente sont indiquées à gauche. Rappel : cela revient à multiplier à gauche par une matrice élémentaire inversible. Ainsi, en partant de l'identité et en lui appliquant les mêmes opérations qu'à la matrice A, on construit la matrice M.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ -L_2 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 2L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices recherchées sont donc

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Le système $AX = Y$ est équivalent au système $MAX = MY$, soit $BX = MY$.

Appelons C_j, $j = 1, \ldots, 4$ les colonnes de B et $e_1, \ldots, e_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Il est clair que B est de rang 2. On obtient une base de $\ker(B)$ (de dimension également 2 par le théorème du rang) en exprimant les colonnes sans pivots de B (donc 2 et 5) en fonction de celles avec pivot. On trouve $C_2 = 2C_1$ et $C_4 = 2C_3 + 3C_1$. Du coup, $(e_2 - 2e_1, e_4 - 2e_3 - 3e_1)$ forme une base de $\ker(B)$ (évidemment libre, dans $\ker(B)$, et maximal par dimension).

On a

$$MY_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est donc clairement dans l'image de B, et dont on trouve un antécédent évident $-e_1 + 4e_3$. L'ensemble des solutions de $AX = Y_1$ est donc

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^4,\ X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a

$$MY_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

qui n'est clairement pas dans l'image de B à cause de la troisième coordonnée non nulle. Le système $AX = Y_2$ n'a donc aucune solution.

Exercice 2. (8 points)

(1) Il faut montrer que

(a) pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$;

(b) pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda P) = \lambda f(P)$.

Or

$$\begin{aligned} f(P+Q) &= \begin{pmatrix} (P+Q)(1) \\ (P+Q)'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) + Q(1) \\ (P' + Q')(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) + Q(1) \\ P'(1) + Q'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q(1) \\ Q'(1) \end{pmatrix} \\ &= f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

et

$$f(\lambda P) = \begin{pmatrix} (\lambda P)(1) \\ (\lambda P)'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(P(1)) \\ (\lambda P')(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(P(1)) \\ \lambda(P'(1)) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \end{pmatrix} = \lambda f(P).$$

(2) Bien entendu, $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Par ailleurs, on a

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(X-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui forment la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donc $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vec}(f(1), f(X-1)) \subset \mathrm{im}(f)$. Donc $\mathbb{R}^2 = \mathrm{im}(f)$.

(3) La dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est 3 (la famille $(1, X, X^2)$ en est une base évidente).

(4) Par le théorème du rang, le noyau de f est de dimension $\dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim \mathrm{im}(f) = 3 - 2 = 1$.

(5) Puisque $\ker(f)$ est de dimension 1, il suffit d'y trouver un vecteur non nul qui en sera alors automatiquement générateur et trivialement libre. Or $(X-1)^2 \in \ker(f)$. On a donc une base constituée du seul vecteur $(X-1)^2$.

(6) La famille $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, on a évidemment $\mathrm{Vec}(1, X-1, (X-1)^2) \subset \mathbb{R}^2$. De plus, $X = (X-1)+1$ et $X^2 = (X-1)^2 + 2(X-1) + 1$ donc

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vec}(1, X, X^2) \subset \mathrm{Vec}(1, X-1, (X-1)^2)$$

d'où l'égalité $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vec}(1, X-1, (X-1)^2)$ donnée par la double inclusion. Il est immédiat que cette famille est libre, soit par calcul, soit puisqu'elle est génératrice minimale (dans un espace de dimension 3, toute famille génératrice a au moins 3 éléments).

(7) Il suffit de calculer

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(X-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f\big((X-1)^2\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

La matrice recherchée est donc

$$\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (1) Soit $x \in \ker(f)$. On a alors $f(x) = 0$, et par l'équation vérifiée par f, on a $x = (f \circ f)(x) - f(x) = f(0) - 0 = 0 - 0 = 0$. Donc $\ker(f) = \{0\}$, ce qui est équivalent à f injective par un théorème du cours.

(2) Par un théorème du cours (corollaire immédiat du théorème du rang), une application linéaire d'un espace vectoriel de type fini dans lui-même est injective si et seulement si elle est bijective. Ce théorème s'applique ici puisque f va de E, de type fini, vers lui-même.

(3) L'équation de l'énoncé fournit $f \circ (f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$. L'application $g = f - \mathrm{id}_E$ satisfait donc à $f \circ g = \mathrm{id}_E$, et f étant inversible puisque bijective, la seule application g vérifiant cette équation est l'inverse de f. Donc $f^{-1} = g = f - \mathrm{id}_E$.