Algèbre linéaire L1, 2014-2015 Durée : 2h B. Calmès

Examen de première session

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones, et autres appareils électroniques.
Toute réponse doit être prouvée (par exemple, dans l'exercice 2 question (4), la simple donnée du nombre entier demandé ne rapporte aucun point. C'est la justification qui est attendue.)
Le barême est indicatif et comporte 22 points au total.
Attention, ce sujet est sur deux pages, penser à tourner la page.

Questions de cours : (4 points) **Toute notation utilisée doit être introduite.** (par exemple, le correcteur ne sait pas ce que c'est que E si on ne lui dit pas.)
1. Donner la définition d'une famille libre dans un espace vectoriel.
2. Énoncer le théorème du rang.

Exercice 1. (6 points) Dans cet exercice, les espaces vectoriels considérés sont sur $\mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

(1) Le système $AX = Y$, d'inconnue X, peut-il avoir une unique solution (pour certaines valeurs de Y) ?

(2) Dérouler l'algorithme qui permet de trouver une matrice B échelonnée et une matrice M inversible telles que $MA = B$.

(3) Résoudre (en X) le système $AX = Y_1$ puis résoudre le système $AX = Y_2$ pour les vecteurs

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En cas d'insuccès à la question (2), on pourra considérer que les matrices sont

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et s'en servir pour la fin de l'exercice.

Exercice 2. (8 points) On considère l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à deux, muni de l'addition et de la multiplication par un réel habituelles, qui en font un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \end{pmatrix}. \end{array}$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Montrer que f est surjective.

(3) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$?

(4) Quelle est la dimension du noyau de f.

(5) Donner une base du noyau de f.

(6) On considère la famille $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$ et soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(7) Donner la matrice $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$.

Exercice 3. (4 points) Soient E un espace vectoriel de type fini sur $\mathbb{R}$, et soit $f : E \to E$ une application linéaire. On suppose que $f \circ f = f + \mathrm{id}_E$.

(1) Montrer que f est injective.

(2) Montrer que f est inversible.

(3) Exprimer son inverse en fonction de f.