Algèbre linéaire L1, 2017-2018 Durée : 2h B. Calmès

Examen de première session

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones, montres connectées et autres appareils électroniques.
Toute réponse à un exercice doit être justifiée.

Questions de cours
A. Montrer qu'une application linéaire f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
B. Définir la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel E donné.
C. Soit E un espace vectoriel de type fini, muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $f : E \to E$ une application linéaire.

(1) Définir la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$;
(2) Prouver que cette matrice est inversible ;
(3) Donner la formule qui relie la matrice $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{C}$ à $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$.

Exercice 1. On considère l'ensemble E des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même que l'on munit de l'addition et de la multiplication par les scalaires usuelles :

$$\forall f, g \in E, \quad (f+g) : x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f) : x \mapsto \lambda f(x).$$

(1) Montrer que E est un espace vectoriel.
(2) Parmi les sous-ensembles de E suivants, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels (et justifier sa réponse, bien entendu).
   (a) $F_1 = \{f \in E \mid f(1) = 1\}$
   (b) $F_2 = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$
   (c) $F_3 = \{f \in E \mid f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}\}$

Exercice 2. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par leurs matrices sur les bases canoniques.

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ et $g(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$
(2) Calculer les matrices de $g \circ f$ et $h \circ g$ sur les bases canoniques.
(3) Donner une base de $\ker(g)$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
(4) Sans faire de calcul, justifier que $\ker(h \circ g) \neq \{0\}$

Exercice 3. Déterminer les solutions du système suivant selon les valeurs de m.

$$\begin{cases} 2\,x + m\,y & +z = & 3m \\ \quad x - (2m+1)y & +2\,z = & 4 \\ 5\,x - y & +4\,z = & 3\,m - 2 \end{cases}$$

Exercice 4. On considère l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel. On considère les deux applications linéaires suivantes définies par leurs valeurs sur la base $(1, X, X^2, \ldots)$ de la manière suivante : $f(X^k) = X^{k+1}$ pour $k \geq 0$ et $g(1) = 0$, $g(X^k) = X^{k-1}$ pour $k \geq 1$.

(1) Déterminer $g \circ f$.

(2) Montrer que $(f \circ g)^2 = f \circ g$; on rappelle que h^m veut dire la composée $h \circ \cdots \circ h$ (m facteurs).

(3) Calculer $(f \circ g)(P)$ et $(\mathrm{Id} - f \circ g)(P)$ pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

(4) Calculer $(f^i \circ (\mathrm{Id} - f \circ g) \circ g^j)(P)$ pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

(5) On pose, pour i, j entiers naturels, $e_{i,j} = f^i \circ (\mathrm{Id}_V - f \circ g) \circ g^j$. Calculer $e_{i,j} \circ e_{k,l}$ pour i, j, k, l des entiers naturels.