ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE I: ESPACE VECTORIEL - SOUS-ESPACE VECTORIEL

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ de l'opération interne $+$ et de l'opération externe $\cdot$ suivantes: $\forall\ (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y) \text{ si } \lambda \neq 0, \text{ et } 0 \cdot (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Vérifier si $\mathbb{R}^2$, muni des opérations interne et externe suivantes, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (a, \lambda b)$.
(2) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.
(3) $(a,b)+(c,d) = (c,d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$.

Exercice 3. Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $a = (0,2,-2,1)$, $b = (1,3,1,-1)$ et $c = (-3,0,4,2)$. Calculer les vecteurs $v = a + 3b - 2c$ et $w = 5(2a-3c) + 2(-b-3a) + (5b+12c)$.

Exercice 4. Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $a = (1,0,2,4)$, $b = (0,1,9,2)$ et $c = (-4,2,10,-12)$. Trouver deux réels x et y tels que $xa + yb = c$.

Exercice 5. Dans chaque cas, dire si l'ensemble V_i, $1 \leq i \leq 6$, est un sous-espace vectoriel de V:

(1) $V = \mathbb{R}$ et $V_1 = \mathbb{Q}$.
(2) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.
(3) $V = \mathbb{R}^3$ et $V_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.
(4) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$.
(5) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$.
(6) $V = \mathbb{R}^4$ et $V_6 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les opérations $+$ et $\cdot$ données par: $\forall\ f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f+g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \lambda \cdot f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

(1) $E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$.

(2) $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.
(3) $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ est croissante$\}$.
(4) $E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7. Soient $a_1, \cdots, a_p$ et b des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble

$$\mathrm{Vec}(a_1, \ldots, a_p) = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_p a_p \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que:

(1) $\mathrm{Vec}(a_1, \ldots, a_p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
(2) si $\mathrm{Vec}(a_1, \cdots, a_p) \cap \mathrm{Vec}(b)$ n'est pas nul, alors $\mathrm{Vec}(b) \subset \mathrm{Vec}(a_1, \cdots, a_p)$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel de l'exercice 6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies?

(1) La fonction exponentielle est dans $\mathrm{Vec}(\sin, \cos)$.
(2) L'ensemble des fonctions tendant vers 0 en $+\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(3) L'ensemble des fonctions tendant vers 1 en $+\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 9. On considère les ensembles suivants:

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0$ et $y + z = 0\}$.
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
$H = \{(x + z, x - z, 2x + y + 3z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

(1) Montrer que E, F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer $E \cap F$, $E \cap G$ et $E \cap H$.
(3) Les ensembles $E \cup F$ et $E \cup G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soit l'ensemble $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2\}$.

(1) Montrer que $V_1 \cap V_2$ et $V_1 + V_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
(2) Montrer que $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.
(3) En déduire que si $V_1 \neq \mathbb{R}^n$ et $V_2 \neq \mathbb{R}^n$, alors $V_1 \cup V_2 \neq \mathbb{R}^n$.

Exercice 11. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:

(1) Pour $a, b \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{Vec}(a) \cup \mathrm{Vec}(b) = \mathrm{Vec}(a, b)$.
(2) Soient $a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{R}^n$ $(p \geq 2)$.
Si $a_p \in \mathrm{Vec}(a_1, \cdots, a_{p-1})$, alors $\mathrm{Vec}(a_1, \cdots, a_p) = \mathrm{Vec}(a_1, \cdots, a_{p-1})$.
(3) Soient $a_1, \cdots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{R}^n$.
Si $\mathrm{Vec}(b_1, \cdots, b_q) \subset \mathrm{Vec}(a_1, \cdots, a_p)$, alors $q \leq p$.

Exercice 12. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\beta \neq 0$ et $\alpha a + \beta b + \gamma c = (0, \cdots, 0)$. Montrer qu'on a $\mathrm{Vec}(a, c) = \mathrm{Vec}(b, c)$.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $a = (-1, 2, 1)$ et $b = (0, 1, -1)$.

(1) Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que $(x, 1, 2) \in \mathrm{Vec}(a, b)$.
(2) Soient $u = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$. Montrer que $\mathrm{Vec}(a, b) = \mathrm{Vec}(u, v)$.

Exercice 14. Soient E, F, G trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'on a

$$E \cap (F + (E \cap G)) = (E \cap F) + (E \cap G).$$