UNIVERSITÉ D'ARTOIS
FACULTÉ DES SCIENCES JEAN PERRIN

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020
LICENCE I MATHS-INFO

ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE II: BASE - DIMENSION

Exercice 1. Soient $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les affirmations suivantes:

(1) $v_1, \cdots, v_n$ engendrent V.
(2) $v_1, \cdots, v_n$ n'engendrent pas V.
(3) $v_1, \cdots, v_n$ sont linéairement indépendants.
(4) $v_1, \cdots, v_n$ ne sont pas linéairement indépendants.

Exercice 2. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

(1) $u = (1, -1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$ et $w = (3, -3, 3)$.
(2) $u = (2, 0, -1)$, $v = (1, 3, 4)$ et $w = (1, 1, 1)$.

Montrer que les vecteurs u, v, w sont linéairement dépendants. Écrire dans chaque cas une relation liant les trois vecteurs.

Exercice 3. Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel V ($n \geq 2$). On considère les vecteurs $w_1, \ldots, w_n$ donnés comme suit:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, \\ w_2 &= v_1 + v_2, \\ &\vdots \\ w_n &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n. \end{aligned}$$

Montrer que les vecteurs $w_1, \cdots, w_n$ sont linéairement indépendants.

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois vecteurs de E:

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{3x} \end{array}$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. *(On pourra considérer le comportement de la fonction exponentielle à l'infini.)*

Exercice 5. Soient u, v, w trois vecteurs d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$. Montrer que si u, v, w sont linéairement indépendants, alors il en est de même pour $u + v$, $v + w$ et $u + w$. A-t-on la réciproque?

Exercice 6. Montrer que les vecteurs $u = (1, -1)$, $v = (2, 1)$, $w = (3, 2)$ engendrent $\mathbb{R}^2$. Exprimer le vecteur (x, y) comme combinaison de ces trois vecteurs. Cette décomposition suivant les vecteurs u, v, w est-elle unique?

Exercice 7. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, -2, 1, 2)$, $u_2 = (1, -3, 1, 2)$, $u_3 = (2, -4, 3, 4)$ et $u_4 = (1, -1, 2, 3)$.

(1) Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
(2) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les coordonnées de u dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 8. Soient $n \geq 1$ un entier, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

(1) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
(2) Montrer que la famille $(1, X-1, (X-1)^2, \cdots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \text{ et } z + t = 0\}$.

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
(2) Donner une base de E, puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
(3) Les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2, -2)$, $u_2 = (-1, 0, -1, 1)$ et $u_3 = (-2, 1, -1, 1)$ forment-ils une famille génératrice de E?

Exercice 10. Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés par
$E = \mathrm{Vec}((3, -3, 2), (0, 2, 1))$ et $F = \mathrm{Vec}((2, -1, 1), (1, -2, -4), (1, 0, 2))$.

(1) Donner une base de E et une base de F.
(2) Donner les équations exprimant les espaces E et F.
(3) Déterminer une base de $E + F$ et une base de $E \cap F$.

Exercice 11. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs
$u_1 = (1, 4, 1, 2)$, $u_2 = (2, 2, 0, 1)$ et $u_3 = (-1, 2, 1, 1)$.

(1) Donner une base de E, puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
(2) Donner des équations décrivant E.
(3) Pour quels réels α, β, le vecteur $(\alpha, \beta, 1, 2\alpha)$ appartient-il à E?

Exercice 12. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On munit $\mathcal{S}$ de l'opération interne $+$ et de l'opération externe $\cdot$ comme suit:

$$\forall\, u, v \in \mathcal{S},\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} : \quad u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ et } \ \lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
(2) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par la relation de récurrence: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
   (b) Soient $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\mathcal{F}$.
   (c) Montrer que pour tout $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u_0, u_1) = \lambda(1, r) + \mu(1, s)$.
   (d) En déduire que $((r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (s^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathcal{F}$.

Exercice 13. Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une base d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que l'ensemble $\{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension $n - 1$.
(2) Soit $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ un vecteur donné de V. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ si et seulement si les vecteurs $v - v_1, v - v_2, \cdots, v - v_n$ sont linéairement dépendants.

Exercice 14. Soient U, V deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$. Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) \geq n - 2$.

Exercice 15. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, on désigne par $P'(X)$ son polynôme dérivé.

(1) Montrer que les polynômes $P(X)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ forment un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_3[X]$.
(2) Montrer que $\mathcal{B} = \{(X-1)^2, X(X-1)^2\}$ est une base de F.
(3) Compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
(4) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 16. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{P} = \{f \in E \mid f \text{ est paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E \mid f \text{ est impaire}\}$. Étant donné $f \in E$, on définit deux éléments f_p et f_i de E comme suit:

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ et } f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que $f_p \in \mathcal{P}$ et $f_i \in \mathcal{I}$.
(2) En déduire que $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.
(3) Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 17. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid \exists\, a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
(2) Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 18. On considère dans $\mathbb{R}_3[X]$ les sous-espaces vectoriels $E = \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $F = \mathrm{Vec}(1 - X - X^2, X - X^3, 1 + X^2 + X^3)$. La somme $E + F$ est-elle directe? si oui, est-ce que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 19. Soient $n \geq 1$ un entier, et V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

(1) Soit W un sous-espace vectoriel de V non nul. Montrer que W admet une base.
(2) Soit m un entier naturel inférieur ou égal à n. Montrer que V admet un sous-espace vectoriel de dimension m.

Exercice 20. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ ($n \geq 2$). Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$ deux familles libres de V de cardinal $p < n$.

Montrer qu'on peut trouver $n - p$ vecteurs $v_{p+1}, \cdots, v_n$ de V tels que $(e_1, \cdots, e_p, v_{p+1}, \cdots, v_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p, v_{p+1}, \cdots, v_n)$ soient des bases de V.

Exercice 21. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille liée de $\mathbb{R}^n$. On suppose que toute sous-famille de $\mathcal{F}$ de $n - 1$ vecteurs est libre.

(1) Donner un exemple d'une telle famille $\mathcal{F}$.
(2) Montrer qu'il existe n réels non tous nuls $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$.
(3) Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $\lambda_1 = c\alpha_1, \lambda_2 = c\alpha_2, \cdots, \lambda_n = c\alpha_n$.
(4) Montrer que l'ensemble $\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1.