ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE III: MATRICES

Exercice 1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $-2A+3B$.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = \mathrm{Id}_2$.

Exercice 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:
(1) Si le produit de deux matrices est nul, alors l'une des deux matrices est nulle.
(2) Si A, B, C sont trois matrices telles que $AB = AC$ avec A non nulle, alors $B = C$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice donnée par: $A_{ij} = 2^{i+j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On considère les deux matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Calculer les matrices BA, AC, CB, BC, BAC.

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et Id_n la matrice identité. Montrer qu'il existe un entier naturel p non nul, et des réels $a_0, \cdots, a_p$ non tous nuls tels que: $a_0\mathrm{Id}_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_pA^p = \Theta$, où Θ est la matrice nulle.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$, qu'on appelle *la trace* de A. Montrer que pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes:
(1) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.
(2) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{Tr}(A)$.
(3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB - BA \neq \mathrm{Id}_n$. *(On pourra se servir de la trace.)*

Exercice 9. Soient D l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, et T l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle.

(1) Montrer que D et T sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que la somme $D+T$ est directe.
(3) Donner une base de D, T et $D\oplus T$.

Exercice 10. Soit E l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, puis donner une base de E.
(2) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer une base de l'espace vectoriel $E\cap \mathrm{Vec}(A,B)$, puis la compléter en une base de E.

Exercice 11. Soit $n\in\mathbb{N}_{>0}$. Une matrice $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *triangulaire supérieure* si $A_{ij}=0$ lorsque $i>j$ (c'est-à-dire, tous les coefficients situés sous la première diagonale sont nuls).

(1) Montrer que l'ensemble T des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
(2) Donner une base de T et $\dim_{\mathbb{R}} T$.
(3) Montrer que si $A,B\in T$, alors $AB\in T$.

Exercice 12. Soient $m,n\in\mathbb{N}_{>0}$ et $A\in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. *La transposée* de A est la matrice de $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, qu'on note A^t, donnée par: $(A^t)_{ij}=A_{ji}$ pour $1\le i\le n$ et $1\le j\le m$. Lorsque $n=m$, on dira que A est *symétrique* si $A^t=A$, et on dira que A est *antisymétrique* si $A^t=-A$.

(1) Soient $A,B\in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrer les propriétés suivantes: $(A+B)^t = A^t+B^t$, $(\alpha A)^t=\alpha(A^t)$ et $(A^t)^t=A$.
(2) Soient $A\in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $(AB)^t=B^tA^t$.
(3) Montrer que l'ensemble S des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base de S pour $n=3$.
(4) Montrer que l'ensemble S' des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base de S' pour $n=3$.
(5) Montrer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = S\oplus S'$.

Exercice 13. Le but de cet exercice est de montrer que le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée. Soit $A\in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de coefficients $(a_{i,j})$. On note $l_1,\dots,l_m$ les lignes de A et $c_1,\dots,c_n$ ses colonnes.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(A)\le n$ et $\mathrm{rg}(A)\le m$. Montrer de même que $\mathrm{rg}(A^t)\le n$ et $\mathrm{rg}(A^t)\le m$.
(2) Si $\mathrm{rg}(A^t)<m$, on choisit une ligne k qui est linéairement dépendante des autres. Soit $A'\in \mathrm{M}_{m-1,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant cette ligne de A. Montrer que $\mathrm{rg}(A^t)=\mathrm{rg}(A'^t)$.
(3) Soit $f:\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^{m-1}$ l'application qui supprime la k-ième coordonnée, et considérons $\mathrm{im}(A)=\mathrm{Vec}(c_1,\dots,c_n)$. Montrer que $f_{|\mathrm{im}(A)}$ est injective.
(4) En déduire que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A')$.
(5) Soit $B\in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue à partir de A en répétant l'étape (2). Montrer que $\mathrm{rg}(B)=\mathrm{rg}(A)$ et $p=\mathrm{rg}(B^t)=\mathrm{rg}(A^t)$.
(6) En déduire que $\mathrm{rg}(B)\le\mathrm{rg}(B^t)$ et conclure.