ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE IV: APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$. On rappelle que $l_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ est l'application liénaire donnée par: $l_A(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^4$.
(1) Montrer que l_A est une application linéaire.
(2) Déterminer une base de $\ker(l_A)$ et $\mathrm{im}(l_A)$.

Exercice 2. Mêmes questions que dans l'exercice précédent en prenant les matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Déterminer une matrice A de $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{im}(l_A) = \mathrm{Vec}(v)$.

Exercice 4. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^5$: $v_1 = (1,2,-4,3,1)$, $v_2 = (2,5,-3,4,8)$, $v_3 = (6,17,-7,10,22)$ et $v_4 = (1,3,-3,2,0)$. Déterminer une base de $\mathrm{Vec}(v_1,v_2,v_3,v_4)$, et donner une relation de dépendance entre v_1,v_2,v_3 et v_4.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par: $f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+y+z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(1) Montrer que f est linéaire.
(2) L'application f est-elle bijective? Si oui, déterminer f^{-1}.

Exercice 6. (1) Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par: $f(P(X)) = P'(X)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$. ($P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.)
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{im}(f)$.
(2) Soit $g : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par: $g(P(X)) = P'(X) - P(1)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$.
   (a) g est-elle linéaire?
   (b) Montrer, sans calculs, que l'ensemble $\{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(X) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7. Soient $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C} = (f_1,f_2,f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\varphi(e_1) = f_1 + f_2; \ \ \varphi(e_2) = -f_1 + f_2; \ \ \varphi(e_3) = f_1 + 3f_2 + 2f_3; \ \ \varphi(e_4) = f_1 + f_2 + f_3.$$

(1) Justifier brièvement pourquoi ces conditions suffisent pour définir φ.
(2) Donner la matrice A telle que $\varphi = l_A$.
(3) Déterminer une base de $\ker \varphi$ et $\mathrm{im}(\varphi)$.
(4) L'application φ est-elle surjective? est-elle injective? Justifier vos réponses.

Exercice 8. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\varphi(e_1) = e_1; \quad \varphi(e_2) = \varphi(e_3) = \frac{1}{2}(e_2 + e_3).$$

(1) Donner la matrice A telle que $\varphi = l_A$.
(2) Déterminer $\ker \varphi$ et $\mathrm{im}(\varphi)$.
(3) Montrer que $\ker \varphi$ et $\mathrm{im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de même dimension, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes: (1) f est injective; (2) f est surjective; (3) f est bijective.

Exercice 10. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par: $\varphi(P(X)) = P(X) - (X-2)P'(X)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
(1) Montrer que φ est linéaire.
(2) Dans le cas $n = 2$, déterminer une base de $\ker \varphi$.
(3) On considère le cas général $n \geq 2$.
  (a) Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, puis $\varphi(X^p)$ pour $2 \leq p \leq n$. En déduire une base de $\mathrm{im}(\varphi)$.
  (b) Déterminer une base de $\ker(\varphi)$.

Exercice 11. Soient V un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de V dans V. Montrer l'équivalence suivante:

$$\mathrm{im}(f) = \ker(f) \quad \Longleftrightarrow \quad (f \circ f = 0,\ n \text{ est pair et } \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(f) = \frac{n}{2}).$$

Exercice 12. Soient U, V et W trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Soient $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow W$ des applications linéaires. Montrer la relation suivante:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(f) - \dim_{\mathbb{R}} \big(\mathrm{im}(f) \cap \ker(g)\big).$$

Exercice 13. Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et V_1, V_2 deux sous-espaces vectoriels de V tels que $V = V_1 \oplus V_2$. Soient $P : V \longrightarrow V$ et $Q : V \longrightarrow V$ les applications données par: $P(v_1 + v_2) = v_1$ et $Q(v_1 + v_2) = v_2$ pour tous $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. On dit que P est la projection de V sur V_1 (suivant V_2), et Q est la projection de V sur V_2 (suivant V_1). On dit aussi que P est la projection complémentaire de Q.
(1) Montrer que P et Q sont des applications linéaires.
(2) Vérifier que $\ker P = \mathrm{im}(Q)$ et $\ker(Q) = \mathrm{im}(P)$.

Exercice 14. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de V dans V telle que: Pour tout $v \in V$, il existe $\lambda_v \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(v) = \lambda_v v$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \lambda v$ pour tout $v \in V$. *(On pourra étudier l'image d'une base de V.)*

Exercice 15. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de V dans V. On suppose qu'il existe un entier naturel k non nul tel que f^k soit l'application nulle. Montrer que $\dim_{\mathbb{R}} \ker f \geq \frac{1}{k} \dim_{\mathbb{R}} V$. *(Procéder par induction sur k et utiliser la restriction de f à $\mathrm{im}(f)$.)*