ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE V: SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1. Déterminer le rang des matrices suivantes (pour la dernière matrice, discuter sur le paramètre m):

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(4)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (5)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires suivants:

$$(1)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +3y & +2z & +t & = & -2 \\ 2x & +7y & +3z & & = & -5 \\ 3x & +8y & +8z & +11t & = & 13 \\ -2x & -8y & -2z & +6t & = & 18 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +4z & -5t & = & 4 \\ & y & -z & +t & = & -3 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -y & +z & +t & = & 0 \\ 3x & -3y & +3z & +2t & = & 0 \\ x & -y & +z & & = & 0 \\ 5x & -5y & +5z & +7t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (4)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & +t & = & -2 \\ 2x & -y & -z & -t & = & -1 \\ x & +y & +z & -2t & = & -8 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes linéaires suivants en discutant sur les paramètres a et b:

$$(1)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & & & = & a \\ & y & +z & & = & b \\ & & z & +t & = & a \\ x & & & +t & = & b \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ 3x & +4y & +5z & = & a \\ & y & +3z & = & b \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{rrrcr} ax & & +bz & = & 0 \\ bx & +ay & & = & 0 \\ & by & +az & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = A^t A$.

(1) Pour tout $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que $Y^t Y$ est nul si et seulement si Y est nul.
(2) Pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que BX est nul si et seulement si AX est nul.
(3) En déduire que A et B ont le même rang.
(4) Trouver une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telle que A et $A^t A$ n'ont pas le même rang.

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est de rang 1 si et seulement si il existe des matrices $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles, telles que $A = CL$. Dans le cas où A est symétrique, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul tel que $L = \lambda C^t$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P + iQ$.

(2) Montrer que si A est de rang 1, alors les matrices P et Q ont des rangs ≤ 2.

Exercice 7. Supprimer les équations redondantes dans les systèmes linéaires suivants:

$$(1)\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +2y & -z & +4t & = & 0 \\ -4x & -2y & -8z & +2t & = & 0 \\ 2x & +2y & +2z & +2t & = & 0 \\ x & & -z & +t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & +z & +t & = & 0 \\ 3x & & +3z & & = & 0 \\ 2x & +y & +2z & +t & = & 0 \\ 6x & +3y & +6z & +3t & = & 0 \\ x & +2y & +z & +t & = & 0 \end{array}\right.$$