ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE VI: CHANGEMENTS DE BASES

Exercice 1. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(2) Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + e_2$.
(3) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(4) Donner la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$.
(5) Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ et $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e'_1 = (1, 1, 0)$, $e'_2 = (0, 0, 1)$ et $e'_3 = (1, 0, 1)$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer la matrice $\underset{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
(3) Déterminer les coordonnés du vecteur $v = 3e_1 - 2e_2 + e_3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3. Soient V un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de V dans V. On suppose qu'il existe un vecteur $v \in V$ non nul tel que: $f^i(v) \neq 0_V$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $f^n(v) = 0$.

(1) Montrer que $\mathcal{B} = (v, f(v), \cdots, f^{n-1}(v))$ est une base de V.
(2) Donner la matrice $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$.

Exercice 4. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et p une projection de V sur un sous-espace vectoriel V_1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(p)$ soit donnée comme suit:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soient

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$b'_1 = b_1 + 2b_2 + 3b_3, \qquad b'_2 = 2b_1 + 3b_2 + b_3 \quad \text{et} \quad b'_3 = 3b_1 + b_2 + 2b_3.$$

Vérifier que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f)$$

la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Donner la matrice correspondante, mais avec la base $\mathcal{B}'$ au lieu de $\mathcal{B}$.