Algèbre linéaire L1, 2014-2015 B. Calmès

Correction du devoir surveillé

Cette correction est très détaillée. Une rédaction un peu plus concise peut être admise, à condition qu'elle reste précise.

Exercice 1. Rappelons qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (avec sa struture habituelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) est un sous-ensemble, disons V, de $\mathbb{R}^3$ qui satisfait aux trois propriétés :

(1) Le neutre $(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ est dans V ;
(2) Pour tous $v=(x,y,z)\in V$ et $v'=(x',y',z')\in V$, on a $v+v'=(x+x',y+y',z+z')\in V$;
(3) Pour tout $v=(x,y,z)\in V$, et $\lambda\in\mathbb{R}$ on a $\lambda v=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in V$.

Ni E ni F ne sont des sous-espaces vectoriels car il ne satisfont pas (1) : $0^2+0^2+0^2=0$ et non pas 1 donc le neutre n'est pas dans E, et il n'est pas dans F non plus puisque $0+0-2\cdot 0=0$ et non 2.

Le sous-ensemble G est un sous-espace vectoriel : L'élément neutre est bien dedans. De plus, soient $v,v'\in G$ comme ci-dessus, et λ un réel, on a

$$(x+x')+(y+y')-2(z+z')=x+y-2z\ +\ x'+y'-2z'=0$$

la dernière égalité étant vraie puisque v et v' sont dans G. Donc $v+v'\in G$. De même,

$$(\lambda x)+(\lambda y)-2(\lambda z)=\lambda(x+y-2z)=0$$

la dernière égalité étant vraie puisque v est dans G. Donc $\lambda v\in G$.

Le sous-ensemble H n'est pas un sous-espace vectoriel : il ne satisfait pas à (2), puisque $(1,1,1)+(1,1,1)=(2,2,2)\notin H$.

On remarque que $H\subset G$, donc $I=G\cup H=G$, donc c'est un sous-espace vectoriel, nous l'avons vu plus haut.

Exercice 2. (1) Le sous-ensemble W est un sous-espace vectoriel car l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (vu dans le cours).

(2) À l'aide des deux équations définissant W, on exprime deux variables en fonction des deux autres, par exemple

$$\begin{cases} x=2y-t \\ z=-3y \end{cases}$$

soit, pour tout vecteur dans W

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment ainsi une famille génératrice de W. De plus, lorsqu'on a $\lambda u + \mu v = 0$, il est immédiat que $\lambda = \mu = 0$ en regardant les deuxième et quatrième coordonnées donc cette famille est également libre et forme une base de W.

Exercice 3. (1) L'espace de départ de l_A est $\mathbb{R}^4$ (4 est le nombre de colonnes de A) et son espace d'arrivée est $\mathbb{R}^2$ (2 est le nombre de lignes de A).

(2) Le noyau de l_A est l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^4$ tels que $AX = 0$. Ce sont donc les éléments de l'espace W de l'exercice précédent, dont on a déjà donné une base (u, v) plus haut.

(3) Par le théorème du rang, nous avons

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker(l_A)) + \dim(\mathrm{im}(l_A))$$

or nous savons que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ et $\dim(\ker(l_A)) = 2$ par la question précédente. D'où $\dim(\mathrm{im}(l_A)) = 2$.

(4) L'application l_A est surjective : en effet, $\mathrm{im}(l_A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension égale à celle de $\mathbb{R}^2$, donc $\mathrm{im}(l_A) = \mathbb{R}^2$ (théorème du cours).

(5) Toute base de $\mathbb{R}^2$ est donc une base de l'image de l_A, par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. (1) Soit $y \in \mathrm{im}(f)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = y$. On en tire $f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = 0$. Donc $y \in \ker(f)$. On a donc bien $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(f)$.

(2) Par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = 3$. Les possibilités pour le couple $(\dim(\ker(f)), \mathrm{rg}(f))$ sont donc

$$(0,3),\ (1,2),\ (2,1) \text{ et } (3,0).$$

Comme de plus $\dim(\mathrm{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$ puisque $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$, les seules possibilités restantes sont donc les deux dernières : $\dim(\ker(f)) = 2$ et $\mathrm{rg}(f) = 1$ ou bien $\dim(\ker(f)) = 3$ et $\mathrm{rg}(f) = 0$.

(3) Le rang de f sera 1 dès que l'application est non nulle (i.e. dès que $\ker(f) \neq \mathbb{R}^3$.)