Algèbre linéaire L1, 2015-2016 B. Calmès

Correction du devoir surveillé

Cette correction est très détaillée. Une rédaction un peu plus concise peut être admise, à condition qu'elle reste précise.
Tous les espaces vectoriels ci-dessous sont sur le corps $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 4.

(1) Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ dont la dérivée seconde est nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ (qu'on appellera V).

(2) Donner une base de V, et sa dimension.

(3) Donner une base de l'intersection de V et de

$$W = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(2) = 0\}.$$

(4) Compléter cette base de $W \cap V$ en une base de V, puis compléter cette dernière en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

(1) Il faut montrer les trois propriétés de la définitioin des sous-espace vectoriel.
- L'élément neutre 0 (le polynôme nul) est bien dans V, puisque sa dérivée seconde est 0 également.
- Si P et Q sont dans V, alors $(P+Q)'' = P'' + Q'' = 0$ (la première égalité est une propriété de la dérivation, et la deuxième vient de $P, Q \in V$).
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in V$, alors $(\lambda P'') = \lambda P'' = 0$ (la première égalité est une propriété de la dérivation, et la deuxième vient de $P \in V$).

(2) Un polynôme de degré ≤ 4 s'écrit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$. On a alors $P'' = 2a_2 + 6a_3X + 12a_4X^2$, et $P'' = 0$ si et seulement si $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, si et seulement si $P = a_0 + a_1X$. D'où $V = \mathbb{R}_1[X]$, dont $(1, X)$ est une base, et dont la dimension est 2.
(3) Un polyôme P est dans V s'il s'écrit $P = a_0 + a_1X$ et dans W si $P(2) = 0$, soit $a_0 + 2a_1 = 0$. On a donc $P \in V \cap W$ si et seulement si $P = \lambda(-2 + X)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, d'où une base de $V \cap W$ constituée de la famille à un élément $-2 + X$.
(4) La famille $(-2 + X, 1, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ de manière évidente (par exemple, c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}_4[X]$ puisque tout élément de la base $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ en est combinaison linéaire ; et elle est minimale puisqu'elle a 5 éléments, la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$). Son premier vecteur est une base de $W \cap V$ comme nous l'avons vu, ses deux premiers vecteurs sont une base de V puisqu'il est immédiat qu'ils engendrent V : $a_0 + a_1X = (a_0 + 2a_1)1 + a_1(-2 + X)$.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et ses sous-espaces vectoriels

$$F = \mathrm{Vec}\big((1, 0, 1), (0, 2, 3)\big) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \mid x = y = z\}.$$

(On ne demande pas de justifier que ce sont bien des sous-espaces vectoriels.)

(1) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ (on ne demande pas de justification) et sa dimension.

(2) F et G sont-ils supplémentaires ?

(1) La base canonique $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, dont la dimension est donc 3.
(2) Un vecteur dans G est de la forme $(x,x,x)=x(1,1,1)$ avec $x\in\mathbb{R}$, donc F est de dimension 1, et $(1,1,1)$ en est une base. La famille $((1,0,1),(0,2,3),(1,1,1))$ est libre :

$$\lambda(1,0,1)+\mu(0,2,3)+\delta(1,1,1)=0$$
$$\iff \begin{cases}\lambda+\delta=0\\ 2\mu+\delta=0\\ \lambda+3\mu+\delta=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda+\mu=0\\ 2\mu+\delta=0\\ 3\mu=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=0\\ \mu=0\\ \delta=0\end{cases}$$

Cette famille est donc une base de $\mathbb{R}^3$: elle est libre, et maximale puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Tout vecteur $v\in\mathbb{R}^3$ se décompose donc *de manière unique* sur cette base. Soit

$$v=\lambda(1,0,1)+\mu(0,2,3)+\delta(1,1,1),\quad \text{avec } \lambda,\mu,\delta\in\mathbb{R}$$

cette décomposition. Le vecteur v s'écrit donc *de manière unique* comme $v=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$, où $f=\lambda(1,0,1)+\mu(0,2,3)$ et $g=\delta(1,1,1)$. Par conséquent, $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension $2n+1$ où $n\in\mathbb{N}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, tous deux de dimension $n+1$.

(1) Peut-on avoir $E=F+G$?
(2) Peut-on avoir $E=F\oplus G$?

(Pour les deux questions, fournir un exemple explicite ou prouver que ça n'est pas possible.)

(1) Pour toute valeur de $n\in\mathbb{N}$ et tout espace vectoriel E de dimension $2n+1$, on peut trouver certains F et G de dimension $n+1$ tels que $E=F+G$: choisissons une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_{2n+1})$ de E. Posons

$$F=\mathrm{Vec}(e_1,\dots,e_{n+1})\quad\text{et}\quad G=\mathrm{Vec}(e_{n+1},\dots,e_{2n+1}).$$

Alors

$$F+G=\mathrm{Vec}(e_1,\dots,e_{n+1},e_{n+1},\dots,e_{2n+1})=\mathrm{Vec}(e_1,\dots,e_{2n+1})=E$$

et F et G sont bien de dimension $n+1$ tous les deux puisque les familles $(e_1,\dots,e_{n+1})$ et $(e_{n+1},\dots,e_{2n+1})$ sont libres, étant des sous-familles de la base $\mathcal{B}$.
(2) On ne peut jamais avoir $E=F\oplus G$. En effet, la formule de Grassmann nous donne

$$\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F+G)$$

or $F+G\subset E$ d'où $\dim F+G\leq 2n+1$. Donc

$$\dim(F\cap G)\geq (n+1)+(n+1)-(2n+1)=1.$$

On a donc $F\cap G\neq\{0\}$.