Algèbre linéaire L1, 2016-2017 B. Calmès

Correction du devoir à la maison

Tous les espaces vectoriels ci-dessous sont sur le corps $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 4.

(1) Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ dont la dérivée seconde est nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ (qu'on appellera V).

(2) Donner une base de V, et sa dimension.

(3) Donner une base de l'intersection de V et de
$$W = \mathrm{Vec}(X^2 + X + 1, X^3 + X, X^3 + X^2)$$

(4) Compléter cette base de $W \cap V$ en une base de V, puis compléter cette dernière en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

(1) L'application "dérivée" $D : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ envoyant P sur P' est linéaire (propriétés de la dérivation). L'application $D \circ D$ est donc également linéaire. Le sous-ensemble V est $\ker(D \circ D)$, c'est donc un sous-espace vectoriel (le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel).
(2) Un polynôme de degré ≤ 4 s'écrit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$. On a alors $P'' = 2a_2 + 6a_3X + 12a_4X^2$, et $P'' = 0$ si et seulement si $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, si et seulement si $P = a_0 + a_1X$. D'où $V = \mathbb{R}_1[X]$, dont $(1, X)$ est une base, et dont la dimension est 2.
(3) Un polyôme P est dans W s'il s'écrit
$$P = \lambda(X^2+X+1)+\mu(X^3+X)+\delta(X^3+X^2) = (\mu+\delta)X^3+(\lambda+\delta)X^2+(\lambda+\mu)X+\lambda.$$
et donc $P'' = 6(\mu + \delta)X + 2(\lambda + \delta)$. Il est donc dans W si $\mu + \delta = 0$ et $\lambda + \delta = 0$, soit $\mu = \lambda$ et $\delta = -\lambda$. Donc
$$P = \lambda(X^2 + X + 1) + \lambda(X^3 + X) - \lambda(X^3 + X^2) = \lambda(2X + 1)$$
On a donc $V \cap W = \mathrm{Vec}(2X + 1)$, dont une base est bien sûr $(2X + 1)$ (un seul élément, non nul).
(4) On part de $(2X+1)$, base de $V \cap W$. On la complète par exemple en $(2X+1, X)$, base de V : c'est une famille génératrice puisque $1 = 2X + 1 - 2X$, donc $V = \mathrm{Vec}(1, X) = \mathrm{Vec}(2X + 1, X)$. Elle a le même nombre d'éléments qu'une base de V, elle est donc une base (ou alors voir à la main qu'elle est libre). Enfin, on peut complète cette base de V en prenant des éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. Il faut en prendre 2 pour des raisons de dimension, on choisit X^2, X^3 et X^4. On a bien $\mathbb{R}_4[X] = \mathrm{Vec}(1, X, X^2, X^3, X^4) = \mathrm{Vec}(1 + 2X, X, X^2, X^3, X^4)$, et la base recherchée est $(1 + 2X, X, X^2, X^3, X^4)$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle *projecteur* une application linéaire $p : E \to E$ qui vérifie $p \circ p = p$.

(1) Si p est un projecteur, montrer que $\mathrm{id}_E - p$ est aussi un projecteur.

(2) Montrer que $\mathrm{im}(p) = \ker(\mathrm{id}_E - p)$ et $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E - p) = \ker(p)$.

(3) Montrer que $E = \mathrm{im}(p) \oplus \ker(p)$.

(4) Montrer que si V et W sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$, alors il existe un unique projecteur $p : E \to E$ tel que $V = \mathrm{im}(p)$ et $W = \ker(p)$.

(5) Soient p et q des projecteurs. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

(Dans ce qui suit, p^2 désigne $p \circ p$, comme d'habitude.)
(1) On calcule $(\mathrm{id}_E - p)^2 = \mathrm{id}_E - 2p + p^2 = \mathrm{id}_E - 2p + p = \mathrm{id}_E - p$ (noter qu'on a bien $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ quand h est linéaire).
(2) Si $y \in \mathrm{im}(1 - p)$, alors $\exists x$ tel que $y = x - p(x)$ donc $p(y) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$. Ainsi $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E - p) \subset \ker(p)$. Si $x \in \ker(p)$, alors $p(x) = 0$ donc $x = x - p(x) = (\mathrm{id}_E - p)(x) \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E - p)$. Pour le reste, on applique ce qu'on vient de montrer à $q = \mathrm{id}_E - p$, qui est bien un projecteur par la question précédente, et qui vérifie $\mathrm{id}_E - q = \mathrm{id}_E - (\mathrm{id}_E - p) = p$.
(3) Tout vecteur x s'écrit $x = x - p(x) + p(x)$ donc $E = \mathrm{im}(\mathrm{id}_E - p) + \mathrm{im}(p)$. De plus, si $x \in \ker(p) \cap \mathrm{im}(p)$, alors $x = p(y)$ et $p(x) = 0$ donc $p^2(y) = 0$ mais $p^2(y) = p(y) = x$.
(4) Comme $E = V \oplus W$, tout vecteur x de E s'écrit *de manière unique* $x = v + w$ avec $v \in V$ et $w \in W$. On définit alors $p : E \to E$ par $p(x) = v$, quand $x = v + w$, $v \in V$, $w \in W$. En particulier, $\mathrm{im}(p) \subset V$. On a alors $p(v) = v$ si $v \in V$ puisque la décomposition de v est $v = v + 0$, donc $\mathrm{im}(p) = V$. De plus $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0 + w$ avec $w \in W$, autrement dit $\ker(p) = W$. Enfin, pour tout x, de décomposition $x = v + w$, on a $p^2(x) = p(p(x)) = p(v) = v = p(x)$. Donc $p^2 = p$ et p est bien un projecteur. Montrons qu'il est unique. Si $\mathrm{im}(p) = \mathrm{im}(q) = V$ et $\ker(p) = \ker(q) = W$ avec p, q des projecteurs, si $x = v + w$, $v \in V$ et $w \in W$, on a

$$p(x) = p(v + w) = p(v) = v = q(v) = q(v + w) = q(x).$$

La deuxième égalité vient du fait que $w \in \ker(p)$, la troisième est vraie puisque si $v \in \mathrm{im}(p)$, alors $v = p(y)$ pour un $y \in E$ et donc $p(v) = p(p(y)) = p(y) = v$. Enfin, ces égalités sont également vraies pour q, ce qui donne les dernières. On a donc bien $p(x) = q(x)$ pour tout $x \in E$, i.e. $p = q$.
(5) Si $p \circ q$ et $q \circ p = 0$, alors

$$(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + q^2 = p + q.$$

Réciproquement, si $(p + q)^2 = p + q$ alors $p \circ q + q \circ p = 0$ par l'égalité ci-dessus. De plus, en composant à gauche par p on trouve

$$0 = p \circ p \circ q + p \circ q \circ p = p \circ q + p \circ q \circ p$$

et de même en composant à droite par p

$$0 = p \circ q \circ p + q \circ p$$

D'où

$$p \circ q = -q \circ p \circ q = q \circ p$$

et enfin

$$0 = p \circ q + q \circ p = 2p \circ q$$

donc $p \circ q = 0$ en multipliant par $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, et de même pour $q \circ p$.

Exercice 3. Cet exercice est une application de l'exercice précédent. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Soit $p : E \to E$ tel que $p(f)$ soit la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$. Montrer que p est une application linéaire, un projecteur, et identifier $\mathrm{im}(p)$, $\ker(p)$.

(2) Mêmes questions avec q tel que $q(f)$ soit la fonction $x \mapsto f(1)x$.

(1). On calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
p(\lambda f + \mu g)(x) &= \tfrac{1}{2}\big((\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(-x)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\lambda f(x) + \mu g(x) + \lambda f(-x) + \mu g(-x)\big) \\
&= \lambda \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \mu \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = (\lambda p(f) + \mu p(g))(x)
\end{aligned}$$

donc $p(\lambda f + \mu g) = \lambda p(f) + \mu p(g)$ et p est bien linéaire. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
p(p(f))(x) &= \tfrac{1}{2}\big(p(f)(x) + p(f)(-x)\big) = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \tfrac{1}{2}(f(-x) + f(x))\big) \\
&= \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = p(f)(x)
\end{aligned}$$

donc on a bien $p^2(f) = p(f)$ pour tout f, soit $p^2 = p$, donc p est bien un projecteur. L'image de p est constitué des fonctions paires. En effet, $p(f)(x) = p(f)(-x)$ comme on le voit immédiatement, donc $\mathrm{im}(p)$ est inclus dans l'ensemble des fonctions paires. De plus, si f est paire, alors $p(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(x)) = f(x)$ donc $p(f) = f$, donc les fonction paires sont dans $\mathrm{im}(p)$, d'où l'égalité. Par ailleurs, $p(f) = 0$ si et seulement si $f(x) + f(-x) = 0$ pour tout x, donc $\ker(p)$ est constitué des fonctions impaires.

(2). On calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tous $f, g \in E$,

$$\begin{aligned}
q(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(1)x \\
&= (\lambda f(1) + \mu g(1))x \\
&= \lambda f(1)x + \mu g(1)x \\
&= \lambda q(f)(x) + \mu q(g)(x) \\
&= (\lambda q(f) + \mu q(g))(x)
\end{aligned}$$

donc $q(\lambda f + \mu g) = \lambda q(f) + \mu q(g)$ et q est bien linéaire. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in E$,

$$(q \circ q)(f)(x) = q(q(f))(x) = q(f)(1)x = f(1) \cdot 1 \cdot x = f(1)x = q(f)(x)$$

donc $(q \circ q)(f) = q(f)$ pour tout $f \in E$, donc $q \circ q = q$.
Enfin, $\ker(q)$ est consitué des fonctions f telles que $q(f) = 0$, soit $q(f)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e. $f(1)x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en particulier pour $x = 1$), ce qui est équivalent à $f(1) = 0$. Donc $\ker(q) = \{f \in E \text{ t.q. } f(1) = 0\}$.
Une fonction g est dans $\mathrm{im}(q)$ si elle est de la forme $g : x \mapsto ax$ pour un $a \in \mathbb{R}$. En effet, si g est de cette forme, on a $g = q(g)$, puisque $g(x) = ax = g(1)x$. Donc

$\mathrm{im}(q)$ contient ces fonctions. Et bien entendu une fonction g dans $\mathrm{im}(q)$ est de la forme $q(f)$, donc $g(x) = f(1)x$ pour tout x, et g est bien de la forme ax, avec $a \in \mathbb{R}$. Finalement, $\mathrm{im}(q) = \{f \in E \text{ t.q. } \exists a \in \mathbb{R} \text{ avec } f(x) = ax\}$.