ESPACES VECTORIELS

Résumé de cours d'algèbre linéaire L1 de B. Calmès, Université d'Artois
(version du 1er février 2016)

1. Espaces et sous-espaces vectoriels

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ est un *corps*, que l'on supposera égal à $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{Q}$) tant que la notion de corps n'aura pas été vue.

1.1. **Définition** (espace vectoriel). Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux lois

(1) $+_E : E \times E \to E$, appelée "addition" ou "loi interne",

(2) $\cdot_E : \mathbb{K} \times E \to E$, appelée "multiplication par un scalaire", ou "loi externe",

qui satisfont aux axiomes suivants :

(A1) La loi $+_E$ est associative.

(A2) La loi $+_E$ est commutative.

(A3) La loi $+_E$ admet un élément neutre (à gauche et à droite).

(A4) Tout élément de E a un *opposé* pour la loi $+_E$.

(Autrement dit $+_E$ est une loi de groupe commutatif sur E.)

(M1) La loi $\cdot_E$ est associative.

(M2) La multiplication par l'unité $1_{\mathbb{K}}$ du corps est l'identité de E.

et enfin

(MA1) La loi $\cdot_E$ est distributive par rapport à l'addition $+_E$.

(MA2) La multiplication par un élément de E est linéaire de $\mathbb{K}$ dans E.

Les éléments de E sont alors appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ *scalaires*.
On vérifie immédiatement les petites propriétés suivantes.

1.2. **Proposition.** *(1) L'élément neutre de $+_E$ est unique, et est noté 0_E. On l'appelle le* vecteur nul*.*

(2) L'opposé d'un élément $x \in E$ est unique. On le note $-_E x$.

(3) L'opposé d'une somme est la somme des opposés : $-_E(x +_E y) = (-_E x) +_E (-_E y)$.

(4) L'addition est simplifiable : $\forall x, y, z \in E$, si $x + z = y + z$ alors $x = y$.

(5) La multiplication par $0_{\mathbb{K}}$ absorbe : $\forall x \in E$, on a $0_{\mathbb{K}} \cdot_E x = 0_E$.

(6) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot_E 0_E = 0_E$.

(7) $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $-_E(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_E (-_E x)$

(8) $\forall x \in E$, on a $(-1) \cdot_E x = -_E x$.

(9) $\lambda \cdot_E x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

1.3. **Exemple.** Lorsque $E = \mathbb{K}^n$, on le munit généralement des lois suivantes :

$$(x_1, \ldots, x_n) +_E (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et

$$\lambda \cdot_E (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Il est facile de vérifier que cela en fait un espace vectoriel.

1.4. **Exemple.** Soit $F = \mathcal{F}(A, E)$ l'ensemble des fonctions d'un ensemble quelconque A vers un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. On munit F des lois usuelles d'addition des fonctions, et de multiplication d'une fonction par un scalaire :

$$f +_F g : x \mapsto f(x) +_E g(x)$$

et

$$\lambda \cdot_F f : x \mapsto \lambda \cdot_E f(x).$$

On vérifie que cela fait de F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. En particulier, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont ainsi munies d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.5. **Exemple.** Soit $\mathbb{K}[X]$ l'ensembles des polynômes à une variable X et à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'addition usuelle des polynômes, et la multiplication usuelle d'un polynôme par une constante en font un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1.6. **Définition.** Un *sous-espace vectoriel* F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble F de E tel que

(SEV1) $0_E \in F$;

(SEV2) $\forall x, y \in F$, on a $x +_E y \in F$;

(SEV3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall x \in F$, on a $\lambda \cdot_E x \in F$.

1.7. **Lemme.** *Si $F \subset E$ vérifie les points (SEV2) et (SEV3) et est* non vide*, alors c'est un sous-espace vectoriel. Autrement dit, le point (SEV1) est automatiquement vérifié.*

1.8. **Proposition.** *Si F est un sous-espace vectoriel de E, et qu'on le munit des lois induites par celles de E, alors c'est un espace vectoriel.*

1.9. **Proposition.** *Une intersection $F_1 \cap F_2$ de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.*

1.10. **Proposition.** *Une intersection $\cap_{i \in I} F_i$ d'une famille de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in I}$ de E est un sous-espace vectoriel de E.*

⚠ Une union de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

2. Familles libres, familles génératrices et bases

2.1. **Définition.** Si E est un ensemble (ici ce sera souvent un espace vectoriel), une *famille d'éléments de E indexée par un ensemble I* est une fonction $v : I \to E$. Cela revient donc à la donnée, pour tout élément $i \in I$, d'un élément $v(i)$ de E. On note en général v_i au lieu de $v(i)$, et on désigne la famille en écrivant $(v_i)_{i \in I}$ où les v_i sont des éléments de E. On dit que cette famille est *finie* si l'ensemble I est fini. Une *sous-famille* d'une famille $(v_i)_{i \in I}$ est une famille de la forme $(v_i)_{i \in J}$ où J est un sous-ensemble de I, et v est restreinte à J.

2.2. **Exemple.** Une suite de réels n'est autre qu'un famille de réels ($E = \mathbb{R}$) indexée par $\mathbb{N}$. Une famille de vecteurs indexée par $I = \{1, \ldots, n\}$ est la donnée de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. C'est le cas le plus fréquent de famille finie que nous rencontrerons.

Dans une famille $(v_i)_{i \in I}$, les éléments v_i ne sont pas forcément distincts (autrement dit, rien ne dit que la fonction est injective).

À partir de maintenant, $(E, +_E, \cdot_E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. De plus, par économie d'écriture, lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité, on note simplement $+$ la loi $+_E$ et on ne note plus du tout la loi $\cdot_E$: le vecteur $x +_E y$ est donc noté $x + y$ et le vecteur $\lambda \cdot_E x$ est noté λx.

2.3. **Définition.** Une *combinaison linéaire* de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E est un vecteur qui peut s'écrire $\sum_i \lambda_i v_i$. Les éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont appelés *coefficients* de la combinaison linéaire.

2.4. *Remarque.* Étant donné des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, on peut toujours écrire 0_E comme combinaison linéaire de ces vecteurs (il suffit de prendre tous les coefficients nuls). Par convention sur les sommes vides, 0_E est même une combinaison linéaire de 0 vecteurs.

2.5. **Proposition.** *Si F est un sous-espace vectoriel de E, et si $v_1, \ldots, v_n \in F$, alors toute combinaison linéaire $\sum_i \lambda_i v_i$ est dans F.*

2.6. **Définition.** Étant donné des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E, on note $\mathrm{Vec}(v_1, \ldots, v_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$. Plus généralement, étant donné une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs, on note $\mathrm{Vec}(v_i, i \in I)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de sous-familles finies de I.

2.7. *Remarque.* On dit parfois qu'un sous-espace vectoriel F qui est décrit comme $F = \mathrm{Vec}(v_1, \ldots, v_n)$ est donné sous forme *paramétrique*. En effet, tout vecteur dedans s'écrit comme une combinaison linéaire $\sum_i \lambda_i v_i$ et on peut considérer les λ_i comme des "paramètres" que l'on peut fixer arbitrairement pour obtenir un élément de F. Avec une telle description, il est facile de fournir un élément de F, il suffit de choisir des valeurs pour les λ_i. Par contre, étant donné un élément de E, il n'est pas immédiat de vérifier s'il est dans F. C'est la situation contraire d'une description par des équations cartésiennes.

2.8. **Proposition.** *Pour tous $v_1, \ldots, v_n \in E$,*

(1) *$\mathrm{Vec}(v_1, \ldots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E. Il contient donc 0_E.*
(2) *C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient $\{v_1, \ldots, v_n\}$.*

Ces deux points sont également vrais pour une famille quelconque $(v_i)_{i \in I}$, où I est éventuellement infini.

2.9. **Définition.** On appelle $\mathrm{Vec}(v_i, i \in I)$ le sous-espace vectoriel *engendré* par la famille $(v_i)_{i \in I}$.

2.10. *Remarque.* Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vec}(v_i, i \in I)$ ne dépend que de l'ensemble $\{v_i, i \in I\}$; autrement dit, si $v_i = v_j$ pour $i \neq j$, on peut supprimer l'un des deux indices de I et on obtient le même résultat.

2.11. **Définition.** On dit qu'une famille $(v_i, i \in I)$ *engendre* un sous-espace vectoriel F de E, ou encore qu'elle est *génératrice* de F si $\mathrm{Vec}(v_i, i \in I) = F$.

2.12. **Exemple.** La famille $(v_i)_{i\in I}$ est donc génératrice de $\mathrm{Vec}(v_i, i \in I)$, de manière évidente.

2.13. **Définition.** On dit qu'une famille $v_1, \dots, v_n$ de E est *libre* si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$, si $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ alors $\lambda_i = 0$ pour tout i. Plus généralement, on dit qu'une famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres.

2.14. *Remarque.* On utilise aussi le vocabulaire suivant.
- On dit qu'une famille est liée quand elle n'est pas libre.
- On dit aussi que les vecteurs v_i, $i \in I$, sont linéairement indépendants quand la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

2.15. **Exemple.** Tout famille qui contient le vecteur nul est liée. La famille indexée par l'ensemble vide est libre.

2.16. **Exemple.** Toute famille qui contient une famille liée est liée.

2.17. **Exemple.** Une famille d'un seul vecteur (I a un élément) est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

2.18. **Exemple.** Une famille de deux vecteurs v_1, v_2 est liée si les vecteurs sont proportionnels (i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v_2 = \lambda v_1$, ou bien $v_1 = \lambda v_2$). On dit aussi qu'ils sont *colinéaires*.

2.19. **Proposition.** *Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Si une sous-famille d'une famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice, alors $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.*

Il y a un lien entre les notions de liberté et d'engendrement.

2.20. **Proposition.** *Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille de E, et $(v_i)_{i\in J}$ une sous-famille stricte ($J \neq I$).*

(1) Si est $(v_i)_{i\in J}$ est génératrice alors $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas libre.

(2) Si $(v_i)_{i\in I}$ est libre, alors $(v_i)_{i\in J}$ n'est pas génératrice.

(les deux points sont évidemment équivalents, par contraposition)

2.21. **Définition.** On dit qu'une famille $(v_i)_{i\in I}$ est une *base* de E si elle est libre et génératrice.

2.22. **Exemple.** L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ de l'exemple 1.3 a une base particulièrement naturelle. Elle est constituée des vecteurs $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et le 1 est placé en i-ème position. On l'appelle la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

2.23. **Proposition.** *Soit E un espace vectoriel admettant une base finie $v_1, \dots, v_n$. Alors, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique n-uplet de coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $x = \sum_i \lambda_i v_i$.*

2.24. *Remarque.* La même chose est vraie avec une base quelconque (non nécessairement finie) ; la famille de coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$ doit alors n'avoir qu'un nombre fini de coefficients non nuls.

2.25. **Proposition.** *On a :*

(1) Toute famille libre maximale est génératrice.

(2) Toute famille génératrice minimale est libre.

(Cette famille est donc une base dans les deux cas.)

2.26. **Lemme.** *Si E admet une famille génératrice finie $e_1, \dots, e_n$, alors pour toute famille $f_1, \dots, f_m$, on a soit $f_1, \dots, f_m$ est liée, soit il existe un ensemble d'indices $I \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal $\leq n - m$ tel que* $\mathrm{Vec}(f_1, \dots, f_m, (e_i), i \in I) = \mathrm{Vec}(e_1, \dots, e_n)$.

2.27. **Lemme** (clé)**.** *Si E admet une famille génératrice finie à n éléments, alors toute famille à $m > n$ éléments est liée.*

3. Espaces vectoriels de type fini

3.1. **Définition.** Un espace vectoriel est dit *de type fini* s'il admet une famille génératrice finie.

3.2. **Théorème.** *Tout espace vectoriel de type fini admet une base finie, et toutes ses bases ont le même nombre d'éléments.*

3.3. **Définition.** La *dimension* d'un espace vectoriel de type fini E est le nombre d'élément d'une (et donc de n'importe laquelle) de ses bases. On la note $\dim(E)$.

3.4. *Remarque.* Puisque tout espace vectoriel E de type fini a une dimension qui est un nombre (entier fini), on dit souvent que E est *de dimension finie* pour dire qu'il est *de type fini*. Lorsque E n'est pas de type fini, on dit aussi qu'il est *de dimension infinie*, bien que nous n'ayons pas défini la dimension dans ce cas.

3.5. **Exemple.** L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.

3.6. **Proposition.** *Dans un espace vectoriel de type fini E, toute famille génératrice (ou libre) dont le nombre d'élément est égal à la dimension de E est une base.*

3.7. **Proposition.** *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de type fini est de type fini, et on a* $\dim(F) \leq \dim(E)$*, avec égalité si et seulement si $F = E$.*

3.8. **Exemple.** Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est de dimension 0, 1, $\dots$, ou n et le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ qui est de dimension n est $\mathbb{K}^n$ tout entier.

3.9. **Théorème** (de la base incomplète)**.** *Toute famille libre dans un espace vectoriel E de type fini se complète en une base. Plus précisément, si $e_1, \dots, e_n$ est une famille génératrice de E et si $f_1, \dots, f_m$ est une famille libre dans E, alors $m \leq n$ et il existe $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $f_1, \dots, f_m$ suivi de $(e_i)_{i \in I}$ forme une base de E.*

3.10. *Remarque.* En fait, le théorème de la base incomplète est également vrai dans les espaces vectoriels qui ne sont pas de type fini, mais c'est un peu plus subtil. [1]

3.11. *Remarque.* La preuve du théorème de la base incomplète fournit un algorithme pour construire une base d'un (sous-)espace vectoriel de type fini. Elle est donc extrêmement importante en pratique.

4. Somme, somme directe et supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On considère l'ensemble H constitué des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

4.1. **Proposition.** *Alors*

(1) H est un sous-espace vectoriel de E.

1. Pour les puristes, il faut supposer l'axiome du choix.

(2) C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

4.2. **Définition.** Le sous-espace vectoriel H défini ci-dessus est appelé la *somme* de F et G, et est noté $F+G$.

4.3. **Exemple.** On a $F+G=E$ si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

4.4. **Définition.** Lorsque $F\cap G=\{0_E\}$, on dit que la somme est *directe* (ou que F et G sont en *somme directe*) et l'on écrit $F\oplus G$ au lieu de $F+G$.

⚠ Pour deux sous-espaces vectoriels quelconques F et G de E, écrire $F\oplus G$ n'a aucun sens. Il faut s'assurer que leur intersection est réduite à $\{0_E\}$ avant de pouvoir écrire $F\oplus G$, et cela désigne alors la même chose que $F+G$. Autrement dit, si on a écrit $F\oplus G$, cela veut dire qu'on sait déjà que $F\cap G=\{0_E\}$.

4.5. **Proposition.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La somme $F+G$ est directe (autrement dit on peut écrire $F\oplus G$)

(2) Tout vecteur $v\in F+G$ se décompose de manière unique comme $v=f+g$ où $f\in F$ et $g\in G$.

4.6. **Corollaire.** *On a $F\oplus G=E$ si et seulement si tout vecteur $v\in E$ se décompose de manière unique comme $v=f+g$, où $f\in F$ et $g\in G$.*

4.7. **Définition.** Lorsque les conditions équivalentes du corollaire 4.6 précédent sont vérifiées, on dit que F et G sont *supplémentaires* dans E. On dit aussi que G est *un supplémentaire* de F dans E.

4.8. **Théorème.** *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de type fini admet un supplémentaire.*

4.9. *Remarque.* Le théorème de la base incomplète 3.9 donne un algorithme pour construire un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F donné.

⚠ Il n'y a pas unicité du supplémentaire. Autrement dit, étant donné F, on peut en général trouver de nombreux G différents tels que $F\oplus G=E$.

4.10. **Théorème** (formule des dimensions, dite formule de Grassmann)**.** *Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que $F+G$ est de type fini alors*

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$

4.11. **Théorème** (caractérisation des supplémentaires)**.** *Si E est de type fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) $E=F\oplus G$;

(2) $E=F+G$ et $\dim(E)=\dim(F)+\dim(G)$;

(3) $F\cap G=\{0_E\}$ et $\dim(E)=\dim(F)+\dim(G)$.