CHANGEMENTS DE BASES

Résumé de cours d'algèbre linéaire L1 de B. Calmès, Université d'Artois
(version du 1er février 2016)

1. Matrice d'une application linéaire et bases

Cette partie est une généralisation de la correspondance entre f et M_f introduite dans la définition 3.3 du résumé 2. Cette fois-ci, l'application linéaire f va d'un espace vectoriel de type fini quelconque E vers un autre F. Pour pouvoir lui associer une matrice, il faut choisir une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de E et une base $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ de F pour pouvoir écrire les coordonnées de vecteurs sur ces bases. Soit n la dimension de E et m celle de F.

1.1. **Définition.** Soit $v \in E$. Le vecteur colonne $\mathrm{col}_{\mathcal{B}}(v)$ est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ (identifié aux colonnnes $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) dont les coordonnées sont celles de v décomposé sur la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $v = \sum_i v_i b_i$, alors

$$\mathrm{col}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

1.2. **Proposition.** *L'application $E \to \mathbb{K}^n$ qui envoie v sur $\mathrm{col}_{\mathcal{B}}(v)$ est une application linéaire bijective (un isomorphisme).*

1.3. **Exemple.** Si $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique, alors cette application est l'identité de $\mathbb{K}^n$.

1.4. **Définition.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E, de dimension n, et $\mathcal{C}$ une base de F, de dimension m. On note

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f)$$

la matrice de $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est le vecteur $\mathrm{col}_{\mathcal{C}}(f(b_j))$.

1.5. **Exemple.** Si $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques, alors $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f) = \mathrm{M}_f$ (définition 3.3 du résumé 2). En particulier, si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, alors $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f) = \mathrm{Id}_n$ (mais ce n'est pas le cas si $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$).

1.6. **Proposition.** *L'application*

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f) \end{array}$$

est une application linéaire bijective. En particulier, la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ est mn.

1.7. **Proposition.** *On a* $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f)\mathrm{col}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{col}_{\mathcal{C}}(f(v))$.

1.8. **Exemple** (important)**.** Si $E = F$ et $f = \mathrm{Id}_E$, on obtient $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(\mathrm{Id}_E)$ et

$$\mathrm{col}_{\mathcal{C}}(v) = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(\mathrm{Id}_E)\mathrm{col}_{\mathcal{B}}(v).$$

Cette matrice est donc très importante pour *changer un vecteur de base*, c'est-à-dire passer de son expression sur une base à son expression sur une autre.

1.9. **Proposition.** *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires, E, F et G de type fini et de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, alors*

$$\underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(g \circ f) = \underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}{\mathrm{M}at}(g)\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f).$$

1.10. **Exemple.** Si $f = g = \mathrm{Id}_E$, alors on compose les changements de base.

Si $f : E \to F$ est inversible, alors

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{\mathrm{M}at}(f^{-1}) = \big(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f)\big)^{-1}.$$

Si $E = F$, alors

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{\mathrm{M}at}(\mathrm{Id}_E) = \big(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(\mathrm{Id}_E)\big)^{-1}.$$

1.11. **Corollaire.** *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, et que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de f, on a*

$$\underset{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'}{\mathrm{M}at}(f) = \underset{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}{\mathrm{M}at}(\mathrm{Id}_F)\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f)\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}{\mathrm{M}at}(\mathrm{Id}_E)$$

et en particulier, si $E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, en posant $P = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}{\mathrm{M}at}(\mathrm{Id}_E)$, souvent appelée matrice de passage *de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, on a*

$$\underset{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}'}{\mathrm{M}at}(f) = P^{-1}\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{M}at}(f)P.$$