Analyse 2

$$\int f(x)\,dx$$

Cours d'Analyse

Baptiste Calmès

Laboratoire de Mathématiques de Lens, Faculté des Sciences Jean Perrin, Université d'Artois

Adresse email: baptiste.calmes@univ-artois.fr

Résumé. Ce texte contient des notes de cours d'analyse correspondant au module *Analyse 2* de l'Université d'Artois, Faculté des Sciences Jean Perrin, à Lens, en 2010. Pour le moment, il est destiné à croître et être réorganisé au cours de l'année. Pour m'envoyer une remarque, me signaler une erreur ou une faute typographique etc., utiliser l'adresse email indiquée sur la première page.

Ce document a été produit à l'aide de TEX, un logiciel de traitement de texte particulièrement adapté pour les mathématiques, écrit par Donald Knuth, ainsi que son extension LATEX, due à Leslie Lamport. Enfin, les figures ont été produites à l'aide de pgf/tikz, un paquet de macros de Till Tantau. Tous ces logiciels sont disponibles gratuitement en ligne.

Ceci est la **version du 19 décembre 2013**.

Table des matières

Introduction

Ces notes ne se suffisent pas à elles-mêmes. Elle ne sont destinées qu'à servir de support écrit et de résumé au cours magistral, qui contiendra beaucoup plus d'explications et d'exemples détaillés.

Avant de pouvoir aborder ce cours, il est indispensable de savoir ce qu'est une fonction et comment représenter graphiquement une fonction réelle. Il est important d'avoir bien compris la notion de limite, parce que les définitions des trois notions importantes abordées, à savoir dérivation, intégration et développement limité, font toutes appel de manière essentielle à un procédé de limite. Il faut d'ailleurs déjà avoir assimilé la notion de continuité des fonctions réelles, qui fait également appel à une limite. Enfin, il faut avoir une bonne idée de ce qu'est une dérivée, même si certaines propriétés sont rappelées ici.

Afin d'aider à la compréhension et pour rendre le texte moins aride, j'ai inséré un certain nombre d'explications informelles. Elles ne sont pas censées être prises au pied de la lettre, mais sont juste là pour rappeler l'idée générale de la démarche, et pour que le lecteur puisse s'y retrouver, avoir l'impression de savoir où l'on va et ce qu'on veut faire dans les détails techniques précis qui suivent. Ces explications informelles sont surlignées comme ceci.

Voici maintenant quelques remarques méthodologiques.

Ce cours, et beaucoup d'autres, peuvent (ou doivent) être lus de la manière suivante : pour chaque notion abordée, il faut premièrement se faire une idée générale du phénomène, et du type de propriétés qui sont vraies, sans trop rentrer dans les preuves mais en tentant de bien comprendre les énoncés. Ensuite, il faut tenter de fabriquer soi-même quelques exemples ou contre-exemples, pour assimiler les notions. C'est à ce stade qu'on doit examiner et véritablement comprendre les détails techniques et les bonnes hypothèses, qui font qu'un théorème est vraiment correct, et pas seulement apparemment correct mais faux. Enfin, il faut tenter, sans y passer trop de temps, de prouver soi-même les différents énoncés, puis vérifier dans le texte en cas d'échec ou pour comparer. Une manière de tester si l'on a bien assimilé les choses est de tenter d' exposer soi-même un chapitre sans l'aide du texte, de la manière suivante :

- donner une idée générale des notions abordées et de leur utilité ;
- énoncer les définitions (exactement, sans erreur) ;
- énoncer les principaux théorèmes avec les hypothèses et conclusions précises ;
- donner de bons exemples pour illustrer ces théorèmes ou la manière dont on les emploie ;
- donner de bons contre-exemples à des généralisations abusives des théorèmes.

Enfin, il faut faire de nombreux exercices, qui font pénétrer tout cela, entre autres en se rendant aux séances de travaux dirigés.

Après avoir fait les efforts nécessaires, si vous ne comprenez toujours rien à ce que je raconte, consultez d'autres cours et d'autres ouvrages, et voyez s'ils vous conviennent mieux. Toutes les notions expliquées ici sont bien évidemment classiques et par conséquent détaillées dans de nombreux livres destinés aux étudiants. Il y en existe en gros deux types. Il y a ceux qui sont encyclopédiques, ou tentent de l'être, et qui visent à contenir les théorèmes les plus forts, tous les résultats possibles, etc. et qui sont souvent utiles comme références une fois qu'on connaît bien le sujet. Mais pour commencer, il y a aussi des livres qui sont plutôt introductifs, et qui visent à faire comprendre les concepts employés de la manière la plus simple possible, quitte à affaiblir un peu les résultats, et à ne pas être trop exhaustif. En général, cette dernière catégorie est plus abordable pour une première approche. En fait, il y a un livre qui est presque parfait comme introduction : celui de Spivak [**Spi80**]. S'il n'avait pas deux défauts, celui d'être payant, et celui d'être en anglais [1], ce qui peut poser problème à certains, je l'aurais utilisé directement en lieu et place de ce texte. Voici d'autres livres, listés en page 99. Les tomes [**LFA77a**] et [**LFA77b**] sont assez complets, et sont plutôt à classer dans la catégorie encyclopédique. Par contre, [**Gou08**] se contente souvent de rappels de cours et contient beaucoup d'exercices. Enfin, la note historique des chapitres I, II et III de [**Bou76**] permet d'avoir une idée du temps et des balbutiements qu'il a fallu pour faire émerger les notions de limite, de dérivée et d'intégrale telles qu'on les conçoit aujourd'hui.

1. Ce n'est un défaut que pour les étudiants qui ne parlent pas l'anglais ou ne le lisent pas, et qui feraient mieux de s'y mettre très vite s'ils veulent poursuivre une carrière scientifique.

CHAPITRE 1

Dérivées

1.1. Dérivée d'une fonction en un point

On dit qu'une fonction de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *dérivable en* x lorsqu'elle a une tangente (non verticale) au point $P_x = \big(x, f(x)\big)$. Une tangente n'est rien d'autre qu'une droite qui approxime bien la courbe lorsqu'on s'approche du point P_x. Par exemple, la fonction du haut de la figure 1 a une tangente au point P_x alors que la fonction du bas n'en a pas : la première est dérivable en x et la deuxième ne l'est pas. Pour savoir si une telle tangente existe, on regarde le taux de variation $\Delta_f(x, x_1)$ entre x et un point x_1 quelconque. Ce taux est la pente de la droite qui joint les points P_x et $P_{x_1} = \big(x_1, f(x_1)\big)$. On fait alors tendre x_1 vers x et si le taux de variation $\Delta_f(x, x_1)$ a bien une limite (finie), elle donne la pente de la tangente au point P. On appelle alors cette pente limite *le nombre dérivé de* f *en* x et on le note f'_x. Si ce taux n'a pas de limite, c'est qu'il n'y a pas de tangente, et que la fonction n'est pas dérivable en x. Naturellement, dans ce cas, la notation f'_x n'a aucun sens.

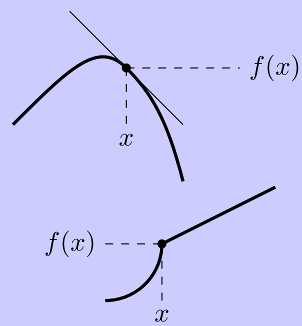


FIGURE 1.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

1.1. REMARQUE. Penser à l'exemple $U =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ lors d'une première lecture. Les autres U ne servent qu'à traiter les fonctions qui ne sont pas définies sur tout $\mathbb{R}$, comme la fonction inverse, mais c'est sans importance pour la compréhension des phénomènes principaux.

1.2. DÉFINITION. Le *taux de variation* de f entre deux réels différents x et x_1 dans U est la quantité $\left(f(x_1) - f(x)\right)/(x_1 - x)$. On le note $\Delta_f(x, x_1)$.

1.3. DÉFINITION. Soit $x \in U$. Si la limite de $\Delta_f(x, x_1)$ existe lorsque x_1 tend vers x, on appelle cette limite *nombre dérivé* de f en x, et on note ce nombre f'_x. On dit alors que f *est dérivable en* x. Si cette limite n'existe pas, on dit que f *n'est pas dérivable en* x.

1.4. DÉFINITION. Soit $x \in U$. Si la limite de $\Delta_f(x, x_1)$ existe lorsque x_1 tend vers x par valeurs supérieures (resp. inférieures), on appelle cette limite *nombre dérivé à droite* (resp. *à gauche*) de f en x, et on note ce nombre $f'_{d,x}$ (resp. $f'_{g,x}$). On dit alors que f *est dérivable à droite* (resp. *à gauche*) *en* x.

1.5. Proposition. *Si f est dérivable à gauche et à droite en x et que $f'_{g,x} = f'_{d,x}$, alors f est dérivable (tout court) en x et $f'_x = f'_{g,x} = f'_{d,x}$.*

Démonstration. Laissée au lecteur. □

1.6. Proposition. *Si f est dérivable à gauche en x (resp. à droite), elle est continue à gauche (resp. à droite) en x. En particulier, si f est dérivable en x, elle est continue en x. On a encore plus fort : si f est dérivable à gauche et à droite en x, elle est continue, même si la dérivée à droite n'est pas égale à la dérive à gauche.*

Démonstration. On a $f(x_1) - f(x) = (x_1 - x)\Delta_f(x, x_1)$. Donc si ce dernier tend vers une limite finie quand x_1 tend vers x (resp. à gauche, à droite), alors $f(x_1) - f(x)$ tend vers 0 (limite d'un produit). □

1.2. Fonction dérivée

Lorsqu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tous les $x \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle est *dérivable sur* $\mathbb{R}$. On peut alors définir une nouvelle fonction, *la fonction dérivée de f* ou plus simplement *la dérivée de f*. Cette fonction est habituellement notée f', et on la construit comme ceci : à chaque valeur de x, on associe f'_x, le nombre dérivé de f en x, qui existe par hypothèse.

1.7. Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U. On dit alors que f *est dérivable sur* U ou plus simplement f *est dérivable* si f est dérivable en tout $x \in U$. On considère alors la fonction qui à $x \in U$ associe le nombre dérivé f'_x, et on note cette fonction f'.

Du coup, on oubliera dorénavant la notation f'_x qu'on ne notera plus que $f'(x)$.

On utilisera les raccourcis de langage suivants : si une fonction f est définie sur un domaine qui contient U et que que sa restriction à U est dérivable, on dira que f est dérivable *sur* U. De plus, si f est définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ avec $a < b$, on dira que f est dérivable sur $[a, b]$ (bien que ce ne soit pas un ouvert) lorsque f est dérivable sur $]a, b[$ et que f admet une dérivée à droite en a et à gauche en b.

La fonction dérivée associe donc à tout x la pente de la tangente à la courbe de f au point $\big(x, f(x)\big)$. On se doute bien que quand la pente, donc le nombre $f'(x)$, est positive, c'est que la fonction f doit croître quand on est très proche de x. C'est à-peu-près vrai. L'énoncé précis est le théorème 1.9. Pour comprendre comment une fonction dérivable varie (croît, décroît), on regarde donc le signe de sa dérivée.

On rappelle la définition suivante.

1.8. Définition. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est

- *croissante* (resp. *décroissante*) sur E si pour tous réels $x < y$ dans E, on a $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$) ;
- *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*), si pour tous réels $x < y$ dans E, on a $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).

⚠ Il est bien sûr très simple de trouver une fonction qui n'est ni croissante ni décroissante sur un intervalle donné. Mais il existe même des fonctions qui ne sont ni croissantes ni décroissantes sur aucun intervalle contenu dans leur ensemble de définition. L'exemple le plus simple est l'indicateur des rationnels : c'est la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il y a des exemples plus fins. On peut construire une telle fonction qui est continue. La figure 16 de [Spi80, p. 145] permet de comprendre à quoi une telle fonction peut ressembler, bien qu'il soit difficile d'en définir une rigoureusement ici avec les moyens du bord.

1.9. Théorème. *Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]a, b[$. Alors*

(1) *Si $f' > 0$ sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$;*
(2) *$f' \geq 0$ sur $]a, b[$ si et seulement si f est croissante sur $[a, b]$.*

Démonstration. Prouvons déjà une direction du point 2 : si f est croissante, alors $f' \geq 0$ sur $[a, b]$. En effet, pour tous points x et y différents, on a $\Delta_f(x, y) \geq 0$, donc sa limite est également supérieure ou égale à 0. Or cette limite est $f'(x)$. La fin de la preuve de ce théorème n'est pas compliquée, mais elle utilise le théorème des accroissements finis 1.19, après lequel nous la reléguons donc. □

1.10. Corollaire (fonction de dérivée nulle). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]a, b[$ et de dérivée nulle. Alors f est constante.*

Démonstration. Par le point 2, la fonction f est croissante et décroissante sur $[a, b]$, elle est donc constante. □

Le théorème et son corollaire ne s'appliquent qu'à une fonction f définie sur un intervalle et non pas sur un ouvert plus général. Par exemple, la fonction $x \mapsto 1/x$, définie sur $\mathbb{R}^*$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ (comparer ses valeurs en -1 et en 1), bien que sa dérivée soit toujours strictement négative. De même, la fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ qui envoie tout x positif sur 1 et tout x négatif sur -1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et de dérivée nulle, mais n'est pas constante. Ce sont seulement ses restrictions à $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ qui sont constantes.

Nous pouvons donc maintenant répondre à la question : étant donné une fonction f, peut-il y a voir beaucoup de fonctions F telles que $F' = f$?

1.11. Définition. Soit f et F deux fonctions réelles définies sur un ouvert. Si $F' = f$, on dit que F est une primitive de f.

1.12. Théorème. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction qui admet deux primitives F_1 et F_2. Alors F_1 et F_2 diffèrent d'une constante.*

Démonstration. La fonction $F_1 - F_2$ est dérivable et de dérivée nulle. Elle est donc constante par le corollaire 1.10. □

Les mêmes précautions sur le domaine de f s'appliquent que plus haut : il faut que ce soit un intervalle.

Pour étudier le comportement d'une fonction dérivable, il est donc très utile de calculer sa fonction dérivée et de regarder son signe.

1.13. Exemple. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, puisque $x < y$ implique $x^3 < y^3$. Toutefois, sa fonction dérivée est $x \mapsto 3x^2$ (regarder la limite du taux de variation, à la main) et est donc nulle en $x = 0$. Cela montre que le point 1 du théorème n'est pas une équivalence : une fonction dérivable et strictement croissante n'a pas forcément sa dérivée strictement positive.

1.14. Exercice. Soit p une fonction polynômiale. Montrer qu'on peut partitionner $\mathbb{R}$ en un nombre fini n d'intervalles sur chacun desquels p est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Montrer qu'on peut choisir n inférieur ou égal au degré de p et que pour tout n, il existe des polynômes de degré n pour lesquels on ne peut pas faire mieux que n. Pour se rafraîchir la mémoire sur les polynômes, voir la partie 4.1.

1.15. Exercice. Soit f une fonction strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' ne peut-être nulle sur un intervalle ouvert non vide.

1.3. Théorème des accroissements finis

Si une fonction est dérivable et qu'elle atteint un maximum, on se doute bien que la pente de la tangente doit être nulle à ce maximum. Le sommet des montagnes qui ne sont pas des pics est horizontal.

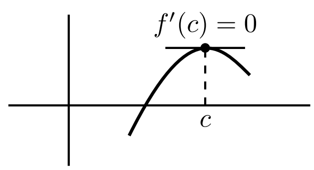


Figure 2. La dérivée au maximum est nulle.

1.16. Théorème (dérivée nulle au maximum). *Soit f une fonction dérivable sur un ouvert U et qui possède une valeur maximale, c'est-à-dire qu'il existe $c \in U$ tel que pour tout $x \in U$, on a $f(x) \leq f(c)$. Alors $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Remarquons que $\Delta_f(c,x) = \big(f(x) - f(c)\big)/(x-c)$ est ≤ 0 pour $x > c$ et ≥ 0 pour $x < c$. Par conséquent, la dérivée à gauche $f'_g(c)$ est ≤ 0 et la dérivée à droite $f'_d(c)$ est ≥ 0. Comme toutes deux valent $f'(c)$ car f est dérivable en c, on a $0 \leq f'(c) \leq 0$ d'où $f'(c) = 0$. $\square$

1.17. Remarque. Le même théorème vaut pour un minimum au lieu d'un maximum, et la preuve est la même.

Du théorème précédant, on déduit assez facilement le théorème de Rolle, qui dit qu'une fonction dérivable qui a deux valeurs nulles doit avoir un maximum et donc une dérivée nulle au maximum.

1.18. Théorème (de Rolle). *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, $a < b$, et dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe un réel $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

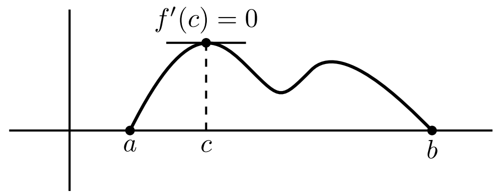


Figure 3. La fonction représentée satisfait au théorème de Rolle.

Démonstration. La fonction f est continue sur $[a, b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes (théorème A.9). Si f atteint son minimum et son maximum en a et/ou en b, elle est identiquement nulle, donc de dérivée nulle sur $]a, b[$ et n'importe quel $c \in]a, b[$ convient donc. Sinon, le maximum ou le minimum est atteint en un $c \in]a, b[$, et par le théorème 1.16 et la remarque 1.17, on a $f'(c) = 0$. □

Le théorème des accroissements finis, c'est simplement le théorème de Rolle de travers, ou plus rigoureusement, il se ramène au théorème de Rolle en soustrayant à la fonction une droite qui passe par deux de ses points.

1.19. Théorème (des accroissements finis). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $a < b$, et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \Delta_f(a, b)$.*

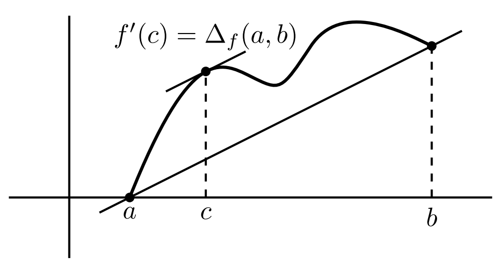


Figure 4. La fonction représentée satisfait au théorème des accroissements finis. Comparer avec la figure 3.

Démonstration. Rappelons que $\Delta_f(a, b) = \big(f(b) - f(a)\big)/(b - a)$. On se ramène au théorème de Rolle en considérant la fonction $g(x) = f(x) - \Delta_f(a, b)(x - a) - f(a)$, c'est-à-dire qu'on corrige f par une fonction affine pour la "mettre à l'horizontale" : il est immédiat que $g(a) = g(b) = 0$. Or g est continue sur $[a, b]$ (car somme de fonctions continues), dérivable sur $]a, b[$ (car somme de fonctions dérivables). Le théorème de Rolle 1.18 nous donne donc immédiatement qu'il existe c tel que $g'(c) = 0$. Mais la dérivée de g est donnée par $g'(x) = f'(x) - \Delta_f(a, b)$, donc $f'(c) = \Delta_f(a, b)$. □

C'est plus ou moins le corollaire suivant qui justifie le nom "accroissements finis" : si f' est bornée, on peut majorer l'accroissement de f.

1.20. Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème des accroissements finis, supposons de plus que* $|f'| \leq M$ *sur* $]a, b[$. *Alors on a* $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Démonstration. C'est immédiat. □

Fin de la démonstration du théorème 1.9. Il ne reste qu'à montrer que si $f' \geq 0$ (resp. $f' > 0$), alors f est croissante (resp. strictement). Supposons que f ne soit pas croissante (resp. strictement croissante), c'est-à-dire qu'il existe x et y avec $a \leq x < y \leq b$ tels que $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) \leq f(y)$), et donc $\Delta_f(x, y) < 0$. On applique alors le théorème des accroissements finis entre x et y. On trouve donc un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \Delta_f(x, y) < 0$ (resp. ≤ 0), ce qui est impossible. □

1.4. Formules de dérivation

Pour savoir si une fonction f est dérivable et éventuellement calculer sa dérivée, plutôt que de le faire à la main en revenant à la définition, on décompose souvent cette fonction en fonctions plus simples pour lesquelles on connaît la réponse (par exemple en somme $f = f_1 + f_2$ ou en produit $f = f_1 f_2$ de deux fonctions), puis on applique des théorèmes généraux qui nous permettent de conclure pour f. Cette section traite certains de ces théorèmes.

1.21. Proposition. *Soient* f *et* g *deux fonctions dérivables sur un ouvert* U. *Alors* $f + g$ *est dérivable et on a l'égalité* $(f + g)' = f' + g'$.

Démonstration. Très facile, laissée au lecteur. □

1.22. Proposition. *Soient* f *et* g *deux fonctions dérivables sur un ouvert* U. *Alors* fg *est dérivable sur* U *et on a* $(fg)' = f'g + fg'$.

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}
\lim_{x_1 \to x} \Delta_{fg}(x, x_1) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x)g(x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \left(\frac{f(x_1)(g(x_1) - g(x))}{x_1 - x} + \frac{(f(x_1) - f(x))g(x)}{x_1 - x} \right) \\
&= \lim_{x_1 \to x} f(x_1) \cdot \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} + \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \cdot \lim_{x_1 \to x} g(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).
\end{aligned}$$

□

1.23. Proposition. *Soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *et* $g : V \to \mathbb{R}$ *deux fonctions, telles que l'image de l'ouvert* U *par* f *est contenue dans l'ouvert* V. *La fonction* $g \circ f$ *est donc bien définie. Alors, si* f *est dérivable sur* U *et* g *est dérivable sur* V, *la fonction* $g \circ f$ *est dérivable sur* U *et sa dérivée est donnée par la formule*

$$(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$$

en d'autres termes, c'est la fonction qui à x *associe* $f'(x)g'\big(f(x)\big)$.

Démonstration. On voudrait écrire

$$\frac{g\circ f(x_1)-g\circ f(x)}{x_1-x}=\frac{g(f(x_1))-g(f(x))}{f(x_1)-f(x)}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$

puis conclure, en utilisant la continuité de f, que le taux de gauche tend vers $g'(f(x))$ et celui de droite vers $f'(x)$ quand x_1 tend vers x. Le problème est que le taux de gauche peut ne pas être défini, même suffisamment proche de x, car $f(x_1)-f(x)=0$ peut se produire pour une infinité de valeurs de x_1 arbitrairement proches de x. Aussi, il faut ruser un peu. Fixons x, et définissons une fonction auxiliaire ϕ par

$$\phi(x_1)=\begin{cases}\frac{g(f(x_1))-g(f(x))}{f(x_1)-f(x)} & \text{si } f(x_1)-f(x)\neq 0\,;\\ g'(f(x)) & \text{si } f(x_1)-f(x)=0.\end{cases}$$

Admettons un instant que cette fonction est continue en x, et déduisons-en la preuve de la proposition. On a alors

$$\frac{g\circ f(x_1)-g\circ f(x)}{x_1-x}=\phi(x_1)\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

pour tout $x_1\neq x$, y compris quand $f(x_1)-f(x)=0$, puisque les deux termes sont alors nuls. D'où

$$\begin{aligned}\lim_{x_1\to x}\frac{g\circ f(x_1)-g\circ f(x)}{x_1-x}&=\lim_{x_1\to x}\phi(x_1)\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\\&=g'(f(x))f'(x)\end{aligned}$$

en utilisant la continuité de ϕ et la dérivabilité de f en x pour la dernière égalité.

Il nous reste donc à voir que ϕ est bien continue en x. Or c'est intuitivement clair : si x_1 est suffisamment proche de x, par continuité de f, alors $f(x_1)$ est proche de $f(x)$ et de deux choses l'une : soit $f(x_1)\neq f(x)$ et par dérivabilité de g, le taux définissant ϕ est proche de $g'(f(x))=\phi(x)$, soit $f(x_1)=f(x)$ et donc $\phi(x_1)=\phi(x)$, ce qui est encore mieux. Nous laissons la traduction facile de cet argument en termes précis de définitions de limites au lecteur. □

Cette formule importante permet de calculer de nombreuses dérivées. On en tire par exemple :

1.24. Corollaire. *Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas. Alors la fonction $(1/f)$ est dérivable sur U et sa dérivée vaut $-f'/f^2$.*

Démonstration. On applique la proposition précédente à f et à $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ qui à x associe $1/x$, dont on montre à la main qu'elle est dérivable et que sa dérivée est $x\mapsto -1/x^2$. □

1.5. Dérivées des fonctions classiques

Pour éviter de se fatiguer, il est pratique de retenir un certain nombre de dérivées de fonctions "classiques", dont on se sert pour en déduire des quantités d'autres grâce aux formules de dérivation.

Voici en table 1 une liste de quelques dérivées, en résumé. Malheureusement, la seule formule que nous soyons capable de prouver à ce stade est celle pour x^α lorsque α est un entier, ou au mieux un rationnel en travaillant un peu. Pour les

TABLE 1. Dérivées de fonctions classiques

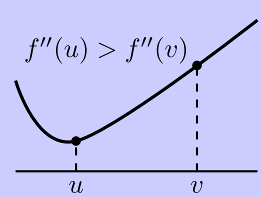
définie sur	$f(x)$	dérivable sur	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^\alpha,\ \alpha \geq 1$	$\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$[0,+\infty[$	$x^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$	$]0,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$]0,+\infty[$	$x^\alpha,\ \alpha < 0$	$]0,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$]0,+\infty[$	$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	$1/x$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$]-\pi/2,\pi/2[$	$\tan(x)$	$]-\pi/2,\pi/2[$	$1/\cos^2(x)$
$[-1,1]$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$[-1,1]$	$\arccos(x)$	$]-1,1[$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$1/(1+x^2)$

autres fonctions, nous n'avons pas encore les bases requises pour les définir, et donc encore moins les dériver ! Admettons-les donc pour l'instant, afin d'avoir une base d'exemples standards. Puis, nous y reviendrons de manière précise au chapitre 4.

Calculons donc en attendant la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné. Remarquons pour commencer que Pour $n = 0$, la fonction est constante, et de dérivée nulle. Supposons que $n > 0$ et montrons que sa dérivée en x vaut nx^{n-1}. C'est certainement vrai pour $n = 1$, car la fonction identité a pour dérivée la fonction constante 1. La formule pour tout $n > 0$ se déduit alors par récurrence en utilisant la formule de dérivée d'un produit 1.22. On obtient alors la formule pour $n < 0$ en utilisant la formule de dérivée d'une inverse 1.24 pour se ramener à $n > 0$.

1.6. Dérivée seconde

Comme on a défini la dérivée de f, on peut regarder celle de f', qu'on appelle *dérivée seconde* et qu'on note en général f''. En fait, la dérivée seconde nous apporte des informations sur la manière dont la fonction est courbée, ce qui se comprend intuitivement car elle détermine la manière avec laquelle la pente de la tangente varie. Un autre aspect intéressant est qu'en calculant la dérivée seconde, on peut trouver la parabole qui approxime le mieux la courbe en un point fixé, et une parabole tangente, cela permet en général d'épouser un peu mieux la courbe qu'une droite tangente.



1.25. DÉFINITION (dérivée seconde). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I \subset U$ contenant c. On dit que f est dérivable deux fois en c si f' admet une dérivée en c, et on note alors $f'(c)$ le nombre dérivé de f' en c. Lorsque f est dérivable deux fois sur tout U, on considère la fonction f'' qui à x associe $f''(x)$ et on l'appelle la dérivée seconde de f.

Rappelons maintenant quelques définitions et propriétés à propos des extrema locaux et des changements de signe.

1.26. Définition (changement de signe). Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et c un point de U. On dit que la fonction f *change de signe en* c s'il existe un intervalle ouvert $]u, v[$ contenu dans U tel qu'on ait soit : pour tout $x \in]u, v[$,

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } x < c; \\ > 0 & \text{si } x > c. \end{cases}$$

soit la situation inverse.

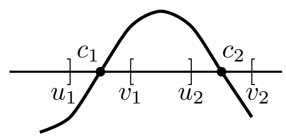


Figure 5. La fonction change de signe en c_1 et c_2.

On ne se préoccupe donc pas de la valeur de $f(c)$ dans cette définition, mais on a bien évidemment le lemme suivant.

1.27. Lemme. *Soit f une fonction continue en c qui change de signe en c. Alors $f(c) = 0$.*

Démonstration. Plaçons nous dans le cas où f est négative sur $]u, c[$ puis positive sur $]c, v[$, le cas inverse étant similaire. La limite à gauche de f en c doit donc être négative, et sa limite à droite positive. Comme les deux sont égales à $f(c)$ puisque f est continue en c, elles sont nulles. □

1.28. Exercice. Cette définition du changement de signe n'est pas particulièrement standard, elle est simplement pratique pour certains énoncés ici. Notons qu'elle exclue des fonctions qui oscillent trop au voisinage d'un point : considérons la fonction $x \mapsto x \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$. Montrer qu'elle est continue en 0 et déterminer les points où elle change de signe au sens de la définition ci-dessus. Le point 0 en fait-il partie ?

1.29. Lemme. *Soit f une fonction dérivable en c telle que $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Alors f change de signe en c. Si $f'(c) > 0$, elle passe de négative à positive, et le contraire si $f'(c) < 0$.*

Démonstration. Supposons qu'on est dans le cas $f'(c) > 0$, l'autre étant similaire. La limite du taux de variation $\big(f(x) - f(c)\big)/(x - c)$ est donc le nombre strictement positif $f'(c)$. En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x tel que $|x - c| < \delta$, on ait $\big|\big(f(x) - f(c)\big)/(x - c) - f'(c)\big| < f'(c)$ (en prenant $\epsilon = f'(c)$ dans la définition d'une limite). Donc pour tout x dans $]c - \delta, c + \delta[$, on a $f(x) - f(c)/(x - c) > 0$, donc $f(x) - f(c) < 0$ pour $x \in]c - \delta, c[$ et $f(x) - f(c) > 0$ pour $x \in]c, c + \delta[$. □

La dérivée seconde est pratique pour rechercher les extréma locaux.

1.30. Définition (maximum, maximum local). Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $c \in U$. On dit que c est un *maximum* de f sur $I \subset U$ si $f(c) \geq f(x)$ pour tout x dans I. On dit que c est un *maximum local* de f s'il existe un intervalle ouvert $]u, v[$ contenant c tel que c est un maximum de f sur $]u, v[\cap U$.

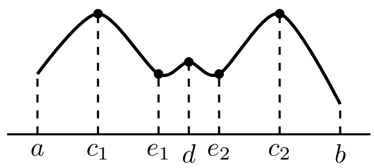


FIGURE 6. Les réels c_1, c_2 et d sont des maxima locaux de la fonction. En fait, c_1 et c_2 sont même des maxima tout court sur $[a, b]$. De même, a, e_1, e_2 et b sont des minima locaux, et b est même un minimum sur $[a, b]$. Tous les points marqués sont des extréma locaux.

Il est facile de deviner quelles sont les définitions d'un minimum et d'un minimum local. Un extremum veut simplement dire un maximum ou un minimum.

1.31. LEMME. *Soit f une fonction continue en un point c de son domaine de définition. Alors, si f change de signe en c, ce n'est pas un extremum local. A l'inverse, si c est un extremum local, f ne change pas de signe en c.*

DÉMONSTRATION. La preuve est évidente à partir des définitions. □

1.32. LEMME. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant c, et telle que f' change de signe en c. Alors c est un extremum local de f. Si f' passe de négative à positive quand x croît, c'est un minimum, si elle passe de positive à négative, c'est un maximum.*

DÉMONSTRATION. Dans le cas où f' passe de strictement négative sur $]u, c[$ à strictement positive sur $]c, v[$, la théorème 1.9 implique la décroissance stricte de f sur un intervalle $]u, c[$ et sa croissance stricte sur $]c, v[$, d'où le résultat. □

1.33. PROPOSITION. *Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ deux fois dérivable en un point $c \in]a, b[$*

(1) *Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$ (resp. $f''(c) < 0$), alors c est un minimum (resp. maximum) local de f ;*
(2) *Réciproquement, si c est un minimum local (resp. maximum local) alors $f''(c) \geq 0$ (resp. $f''(c) \leq 0$).*

DÉMONSTRATION. (1) Prouvons seulement le cas du minimum, celui du maximum étant similaire. Par le lemme 1.29 la fonction f' est négative sur $]u, c[$ et positive sur $]c, v[$ pour un certain intervalle $]u, v[$ contenant c. Par le lemme 1.32, la fonction f admet donc un minimum en c.

(2) La réciproque est une conséquence directe de la première partie de l'énoncé : si c est un minimum local, alors si on avait $f''(c) < 0$, on aurait également que c est un maximum local, donc que la fonction est constante sur un intervalle entourant c, et donc que $f''(c)$ est nulle, ce qui est contradictoire. □

Il n'est pas vrai que si f admet un minimum en c, alors $f''(c) > 0$. Tout d'abord, il se peut que $f''(c)$ n'existe pas : prenons par exemple la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{if } x < 0\,; \\ x^2 & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

Il est facile de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que sa dérivée vaut $f'(x) = 4x$ pour $x < 0$ et $f'(x) = 2x$ pour $x \geq 0$, et donc que f n'est pas dérivable deux fois en $c = 0$. Pourtant $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, le point 0 est donc un minimum de f.

Il est également simple de construire une fonction qui admet un minimum en $c = 0$ et dont la dérivée seconde existe et vérifie $f''(0) = 0$. Il suffit de prendre la fonction $x \mapsto x^4$. Nous verrons toutefois plus loin (proposition 2.16) que lorsque $f'(c)$ et $f''(c)$ sont toutes deux nulles en un point c, il y a quand-même souvent moyen de dire si l'on est à un maximum local ou pas, lorsque la fonction admet des dérivées d'ordre supérieur en c.

Donc, en pratique, lorsqu'on a une fonction dérivable deux fois, pour rechercher ses extréma locaux, on commence par chercher les points où la dérivée s'annule, puis on regarde le signe de la dérivée seconde en ces points. Cela permet bien souvent de conclure, mais pas tout le temps, comme expliqué ci-dessus.

Montrons enfin un lemme qui nous servira par la suite.

1.34. Lemme. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Supposons que f' est croissante (resp. strictement croissante). Alors pour tout $x \in]a, b[$, on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$).*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) > f(a)$. La fonction f étant continue, elle atteint son maximum en un point c tel que $f(c) \geq f(x) > f(a)$ et donc $c \in]a, b[$. On a $f'(c) = 0$ par le théorème 1.16. Par le théorème des accroissements finis 1.19, il existe $c_1 \in]a, c[$ tel que $f'(c_1) = (f(c) - f(a))/(c - a) > 0$, ce qui contredit la croissance de f'. Cela montre donc que si f' est croissante, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \leq f(a)$.

Si maintenant on sait de plus que f' est strictement croissante, il reste à éliminer le cas des $x \in]a, b[$ tels que $f(x) = f(a)$. Supposons qu'un tel x existe. C'est donc un maximum, et il vérifie $f'(x) = 0$. Il doit aussi exister un $x_1 < x$ tel que $f(x_1) < f(a) = f(x)$, sinon f serait constante sur $[a, x]$. A nouveau, on obtient une contradiction en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre x_1 et x. □

1.35. Définition (point d'inflexion). Soit f une fonction dérivable en un point c. On dit que c est un *point d'inflexion* de f si la quantité

$$f(x) - (x - c)f'(c) - f(c)$$

change de signe en c.

1.36. Proposition. *Soit f une fonction réelle dérivable deux fois en un point c.*

(1) *Si c est un point d'inflexion, alors $f''(c) = 0$;*
(2) *Si f est deux fois dérivable sur un intervalle ouvert qui contient c, si $f''(c) = 0$ et si f'' change de signe en c, alors c est un point d'inflexion.*

Démonstration. Soit ϕ la fonction $x \mapsto f(x) - (x - c)f'(c) - f(c)$ qui intervient dans la définition d'un point d'inflexion. Notons que les points où ϕ et f sont

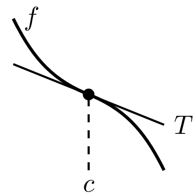


FIGURE 7. Point d'inflexion en c. La courbe de f passe d'un côté à l'autre de sa tangente T en c, d'équation $y = (x-c)f'(c) - f(c)$.

dérivables (resp. deux fois dérivables) sont les mêmes, et qu'en ces points, $\phi'(x) = f'(x) - f'(c)$ et $\phi''(x) = f''(x)$. Notons également que $\phi(c) = 0$ et $\phi'(c) = 0$.

(1) Supposons par l'absurde que $f''(c) = \phi''(c) \neq 0$. Le point 1 de la proposition 1.33 implique que la fonction ϕ admet un extremum local en c, et ne peut donc pas changer de signe, par le lemme 1.31, ce qui contredit la définition d'un point d'inflexion.

(2) Appelons $]u, v[$ l'intervalle ouvert contenant c qui est l'intersection de celui sur lequel f est deux fois dérivable et d'un intervalle donné par la définition du changement de signe. Étudions le signe de la fonction ϕ sur $]u, v[$. Plaçons nous dans le cas où f'' est négative sur $]u, c[$ puis positive sur $]c, v[$, le raisonnement étant le même dans l'autre cas. Il s'ensuit que ϕ' est strictement décroissante sur $]u, c]$ puis strictement croissante sur $[c, v[$. Cela prouve que ϕ' est strictement positive sur $]u, c[$, nulle en c, et à nouveau strictement positive sur $]c, v[$. La fonction ϕ est donc strictement croissante sur $]u, v[$ par le point 1 du théorème 1.9, nulle en c, et change donc de signe en c. □

La proposition précédente caractérise donc les points d'inflexion des fonctions deux fois dérivables en termes des propriétés de la dérivée seconde.

1.37. EXERCICE. Fabriquer un exemple qui montre qu'on ne peut espérer une réciproque au point 2 de la proposition 1.36, qui dirait que si c est un point d'inflexion d'une fonction deux fois dérivable, alors sa dérivée seconde change de signe en c. Indication : commencer par construire une fonction qui oscille énormément en s'approchant de zéro, tout en étant coincée entre 0 et x^3.

La tangente est en quelque sorte la droite qui approxime le mieux la courbe au voisinage d'un point. Il est naturel de se demander si l'on peut approximer une fonction par autre chose qu'une fonction linéaire (une droite). Nous verrons assez généralement dans le chapitre 2 sur les développements limités comment approximer une fonction par un polynôme de n'importe quel degré, et comment donner un sens précis aux mots "approxime le mieux la courbe". Mais le cas le plus simple de polynôme après la droite est la parabole, ou encore un polynôme de degré 2 au lieu d'une fonction linéaire, et commençons par montrer qu'on peut en tout cas trouver une parabole qui a la même valeur, la même dérivée, et la même dérivée seconde qu'une fonction donnée en un point.

1.38. LEMME. *Soit f une fonction dérivable deux fois en un point c. Il existe alors une unique fonction polynômiale p de degré 2 telle que $p(c) = f(c)$, $p'(c) =$*

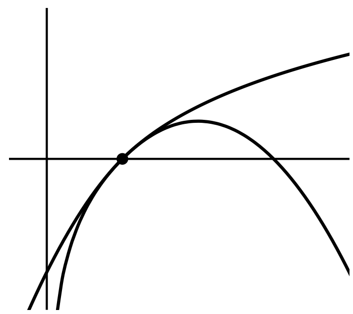


FIGURE 8. La fonction logarithme et une parabole qui a la même valeur et les mêmes dérivées premières et secondes en 1.

$f'(c)$ et $p''(c) = f''(c)$, donné par la formule

$$p(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(c).$$

DÉMONSTRATION. Notons que p doit être de la forme $ax^2 + bx + d$ et est donc bien entendu dérivable deux fois. On a $p'(c) = 2ac + b$ et $p''(c) = 2a$. On doit donc avoir $a = f''(c)/2$, $b = f'(c) - cf''(c)$ et $d = f(c) - cf'(c) + f''(c)c^2/2$. Cela montre l'unicité, et en développant l'expression de l'énoncé, on tombe sur ces valeurs de a, b et d. □

1.39. EXERCICE. Quelle est l'équation de la parabole de la figure 8 ?

1.7. Fonctions convexes

Une fonction convexe est une fonction qui semble "tournée vers le haut", quelque soit l'intervalle sur laquelle on la regarde : si on trace une droite d'un point du graphe à un autre, la fonction est toujours en dessous de cette droite entre ces deux points. C'est le cas sur la figure 9, mais pas sur la figure 10.

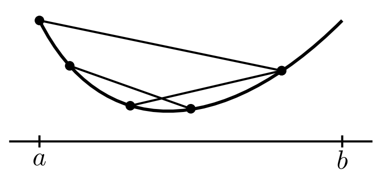


FIGURE 9. Fonction convexe

1.40. DÉFINITION (fonction convexe). Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition contient l'intervalle $[a, b]$. On dit que f est convexe sur $[a, b]$ si quelque soient les réels $u \neq v$ et x tels que $a \leq u \leq x \leq v \leq b$, on a $f(x) \leq \alpha x + \beta$, où $\alpha = \big(f(v) - f(u)\big)/(v-u)$ et $\beta = \big(vf(u) - uf(v)\big)/(v-u)$.

En d'autres termes, sur tout intervalle $[u, v] \subset [a, b]$ (avec $u < v$), une fonction convexe f est inférieure à la fonction linéaire passant par $\big(u, f(u)\big)$ et $\big(v, f(v)\big)$.

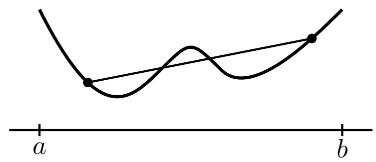


FIGURE 10. Fonction non convexe

1.41. REMARQUE. Une fonction f sera dite *concave* lorsque $-f$ est convexe. On parlera également de fonction *strictement convexe* quand pour tous u, v et x avec $a \leq u < x < v \leq b$, on a $f(x) < \alpha x + \beta$, avec α et β comme ci-dessus. De même, une fonction f est strictement concave quand $-f$ est strictement convexe.

Pour vérifier qu'une fonction est convexe, il ne suffit pas de vérifier la propriété de la définition pour $u = a$ et $v = b$, comme on peut le voir sur la figure 10.

1.42. COROLLAIRE. *Si f est convexe sur $[a, b]$, alors elle est convexe sur tout intervalle $[a_1, b_1] \subset [a, b]$.*

DÉMONSTRATION. C'est évident. □

Voici une reformulation de la définition en terme de barycentres. Rappelons que le barycentre de (u, λ) et $(v, 1-\lambda)$ est le point $x = \lambda u + (1-\lambda)v$, et qu'on a $u \leq x \leq v$ si et seulement si $0 \leq \lambda \leq 1$ (exercice facile).

1.43. PROPOSITION. *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tous $u, v \in [a, b]$ et tout λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$, on a*

$$f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v). \tag{1.1}$$

DÉMONSTRATION. Considérons le point $x = \lambda u + (1-\lambda)v$. On a bien $u \leq x \leq v$. Si f est convexe, alors par définition, on a $f(x) \leq \alpha x + \beta$ avec α et β comme en 1.40. Or

$$\begin{aligned}
\alpha x + \beta &= \frac{f(v) - f(u)}{v - u}\,(\lambda u + (1-\lambda)v) + \frac{vf(u) - uf(v)}{v - u} \\
&= \frac{1}{v-u}\big(f(u)\,(-(1-\lambda)v - \lambda u + v) + f(v)\,(\lambda u + (1-\lambda)v - u)\,\big) \\
&= \frac{1}{v-u}\big(\lambda f(u)(v-u) + f(v)(1-\lambda)(v-u)\big) \\
&= \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)
\end{aligned}$$

ce qui montre que (1.1) est bien satisfaite. Supposons maintenant que pour tous $u \neq v$ et λ comme ci-dessus, on ait (1.1). Tout point x tel que $u \leq x \leq v$ peut s'écrire $x = \lambda u + (1-\lambda)v$, avec $\lambda = (x-v)/(u-v)$ et donc $0 \leq \lambda \leq 1$. En remontant la série d'égalité ci-dessus, on obtient bien que f est convexe selon la définition 1.40. □

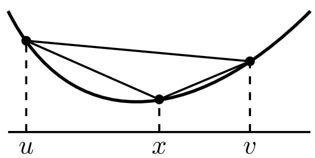
1.44. REMARQUE. Pour la stricte convexité, l'inégalité (1.1) devient stricte et vaut pour $0 < \lambda < 1$.

1.45. LEMME. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle $[a,b]$. Alors pour tous réels $u < x < v$ dans $[a,b]$, on a les inégalités*

$$\Delta_f(u,x) \leq \Delta_f(u,v) \leq \Delta_f(x,v).$$

Réciproquement, si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie la première inégalité (resp. la deuxième) pour tous $u < x < v$ dans $[a,b]$, alors elle est convexe.

Le même énoncé est valable pour la stricte convexité, en remplaçant les inégalités larges par des strictes.



DÉMONSTRATION. Rappelons que $\Delta_f(u,x)$ est le taux de variation de f entre u et x, autrement dit la pente de la droite passant par les points $\big(u, f(u)\big)$ et $\big(x, f(x)\big)$. La fonction affine en la variable x qui passe par $\big(u, f(u)\big)$ et $\big(v, f(v)\big)$ a pour expression $f(u) + (x-u)\Delta_f(u,v)$. D'où, par définition de la convexité,

$$f(x) \leq f(u) + (x-u)\Delta_f(u,v).$$

Cela fournit la première inégalité. On remarque immédiatement, que cette dernière quantité est égale à $f(v) + (u-v)\Delta_f(x,v)$, par exemple en remplaçant $(u-x)$ par $(u-v)+(v-x)$. Cela fournit la deuxième inégalité. La réciproque s'obtient en remontant la preuve ci-dessus à l'envers. □

Le lemme fournit donc une définition alternative à la convexité. Essayons maintenant de comprendre les liens entre les notions de convexité, de continuité et de dérivabilité.

1.46. PROPOSITION. *Toute fonction convexe sur l'intervalle $[a,b]$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point de $]a,b[$. De plus la dérivée à gauche est inférieure à la dérivée à droite.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in \,]a,b[$ et tout $h > 0$ tel que $[x-h, x+h] \subset \,]a,b[$, on a $\Delta_f(x, x-h) \leq \Delta_f(x, x+h)$ par le lemme 1.45. Lorsque h tend vers 0 par valeurs décroissantes, $\Delta_f(x,x+h)$ décroît et $\Delta_f(x,x-h)$ croît, toujours par le lemme 1.45. Les fonctions $h \mapsto \Delta_f(x,x+h)$ et $h \mapsto \Delta_f(x,x-h)$ convergent donc toutes deux, et la limite de la première est inférieure à celle de la deuxième, par un lemme classique sur les limites. □

⚠ Il n'est pas vrai qu'une telle fonction admette nécessairement une dérivée à droite en a et à gauche en b. Par exemple, la fonction qui vaut 1 en $x = 0$ et 0 ailleurs est clairement convexe sur $[0,1]$, mais n'admet pas de dérivée à droite en 0. En fait, pour cette raison, il n'est pas possible de la prolonger en une fonction convexe sur $[a,1]$ pour aucun $a < 0$.

1.47. COROLLAIRE. *Toute fonction convexe sur un intervalle $[a,b]$ est continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.*

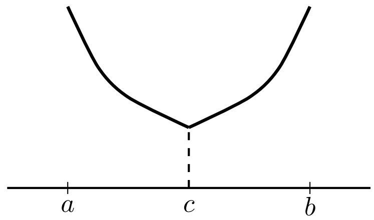


FIGURE 11. Une fonction convexe sur $[a,b]$, qui admet une dérivée à gauche et à droite en tout point. En c, la fonction n'est pas dérivable car la dérivée à gauche et la dérivée à droite ne sont pas égales.

DÉMONSTRATION. Une fonction qui admet une dérivée à droite (resp. à gauche) en x est continue à droite (resp. à gauche) par la proposition 1.6. Une fonction qui est continue à droite et à gauche en x est continue en x. □

1.48. PROPOSITION. *Soit f une fonction convexe sur $[a,b]$ qui est dérivable en un point $c \in \,]a,b[$. Supposons que $u, v \in [a,b]$ sont tels que $u < c < v$. Alors*

$$\Delta_f(u,c) \leq f'(c) \leq \Delta_f(c,v).$$

En particulier, si f est dérivable en deux points $c_1 \leq c_2$, alors $f'(c_1) \leq f'(c_2)$.

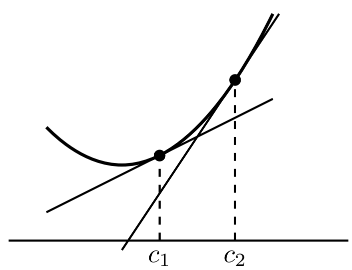


FIGURE 12. Une fonction convexe sur $[a,b]$. Comme $c_1 < c_2$, la pente $f'(c_1)$ est inférieure à $f'(c_2)$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de la preuve de la proposition 1.46 : la limite d'une fonction croissante majorée (resp. décroissante minorée) est plus grande (resp. plus petite) que n'importe laquelle de ses valeurs. L'inégalité sur les dérivées en c_1 et c_2 s'obtient alors en chaînant $f'(c_1) \leq \Delta_f(c_1, c_2) \leq f'(c_2)$. □

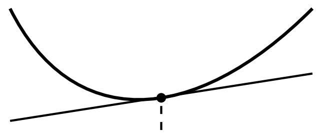
1.49. COROLLAIRE. *Si f est dérivable et convexe sur $[a,b]$, alors f' est croissante.*

1.50. COROLLAIRE. *Toute fonction convexe sur $[a,b]$ et dérivable en $c \in \,]a,b[$ vérifie*

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$

pour tout $x \in [a,b]$, autrement dit, elle est au-dessus de sa tangente en c.

DÉMONSTRATION. On applique la proposition 1.48, avec $u = x$ si $x < c$ ou $v = x$ si $x > c$. □



Voici enfin une réciproque au corollaire 1.49 qui est souvent utilisée pour montrer qu'une fonction est convexe dans la pratique, surtout dans le cas du corollaire qui suit, c'est-à-dire quand la dérivée seconde existe.

1.51. PROPOSITION. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et dont la dérivée est croissante (resp. strictement croissante). Alors f est convexe (resp. strictement convexe) sur $[a, b]$.*

DÉMONSTRATION. Pour tous $u \neq v$ tels que $[u, v] \subset [a, b]$, considérons la fonction ϕ définie par

$$\phi(x) = f(x) - (x - u)\Delta_f(u, v).$$

Elle est dérivable, de dérivée $\phi'(x) = f'(x) - \Delta_f(u, v)$, donc puisque f' est croissante, ϕ' l'est aussi. Le lemme 1.34 implique donc que $\phi(x) \leq \phi(u) = \phi(v) = f(u)$ pour tout $x \in\ ]u, v[$, ce qui donne immédiatement l'inégalité des pentes $\Delta_f(u, x) \leq \Delta_f(u, v)$ et donc la convexité, par la réciproque du lemme 1.45. Pour la stricte convexité, le raisonnement est le même, en remplaçant les inégalités larges par des strictes. □

1.52. COROLLAIRE. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ deux fois dérivable sur $]a, b[$ et dont la dérivée seconde est positive (resp. strictement positive). Alors f est convexe sur $[a, b]$ (resp. strictement convexe).*

DÉMONSTRATION. La dérivée de f' est positive (resp. strictement positive) sur $]a, b[$, donc par le théorème 1.9, f' est croissante (resp. strictement croissante) sur $]a, b[$. Par la proposition 1.51, La fonction f est donc convexe (resp. strictement convexe) sur $[a, b]$. □

1.8. Dérivées supérieures

Après la dérivée seconde, on peut itérer le processus, et définir la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$. L'information que les dérivées d'ordre supérieur à 2 nous apportent est moins claire graphiquement, mais elle est tout aussi importante, et ces dérivées supérieures apparaissent naturellement lorsqu'on veut approximer f par un polynôme de degré arbitraire.

On définit la notion de dérivée d'ordre n par récurrence. Tout d'abord, on pose $f^{(0)} = f$ pour toute fonction f, et on pose que toute fonction est 0-fois dérivable.

1.53. DÉFINITION. Soit $n \geq 1$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction $(n-1)$-fois dérivable sur l'ouvert U. On dit que f est *n-fois dérivable* sur U si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur U. On pose alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. Lorsque f est n-fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est *infiniment dérivable*.

Infiniment dérivable ne veut pas dire qu'il existe une dérivée ∞-ème, tout simplement parce qu'une telle dérivée n'a aucun sens.

Pour définir la dérivée $(n+1)$-ième d'une fonction en un point a, il faut que la dérivée n-ième de f soit définie sur un intervalle ouvert qui contient a (et pas seulement en a), sinon ça n'a pas de sens de parler de la limite du taux de variation de $f^{(n)}$ en a. C'est la raison pour laquelle la définition 1.53 est formulée sur un ouvert U, et non pas seulement en un point a.

1.54. Proposition (formule de Leibniz). *Soient f et g deux fonction définies et dérivables n-fois sur U. Alors fg est dérivable n-fois sur U et sa dérivée est donnée par*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)} g^{(n-i)}$$

où C_n^i est le coefficient binomial.

Démonstration. Montrons la conclusion par récurrence sur n. Elle est clairement vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour $n-1$, et montrons qu'elle est vraie pour n. Puisqu'on suppose f et g dérivables n fois, pour tout i entre 0 et $n-1$, $f^{(i)}$ et $g^{(n-1-i)}$ sont dérivables, donc leur produit est dérivable. En appliquant les formules de dérivation d'un produit et d'une somme, on obtient

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i f^{(i)} g^{(n-1-i)}\right)' \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \left(f^{(i)} g^{(n-1-i)}\right)' \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \left(f^{(i+1)} g^{(n-1-i)} + f^{(i)} g^{(n-i)}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i f^{(i+1)} g^{(n-1-i)} + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i f^{(i)} g^{(n-i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} f^{(i)} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i f^{(i)} g^{(n-i)} \\
&= f^{(0)} g^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \left(C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^i\right) f^{(i)} g^{(n-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)} g^{(n-i)}
\end{aligned}$$

□

1.55. Exercice. Soit f une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer la dérivée n-ième de la fonction définie par $x \mapsto f(x)\exp(x)$ par une formule qui ne fait intervenir qu'une seule fonction exponentielle. On utilisera que la fonction exp est égale à sa dérivée (voir 4.27).

1.9. Formule de Taylor-Lagrange

De même qu'en 1.38, on peut plus généralement espérer approximer une fonction par un polynôme de degré au plus n arbitraire, de manière à ce que les n premières dérivées de la fonction coïncident avec celles du polynôme. C'est le contenu de la proposition 1.58. La formule de Taylor-Lagrange 1.59 nous dit alors que le reste, la différence entre la fonction et ce polynôme, peut s'exprimer à l'aide de la dérivée $(n+1)$-ième de f (quand elle existe). C'est particulièrement utile lorsqu'on connaît une majoration de cette dérivée $(n+1)$-ième, car on peut alors majorer le reste, comme dans l'inégalité de Taylor-Lagrange 1.61.

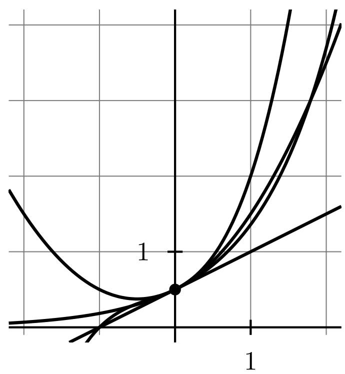


FIGURE 13. La fonction $x \mapsto \exp(x)/2$ approximée en $x = 0$ par des polynômes de degrés 1, 2 et 3. Devinez quel graphe correspond à quelle fonction.

1.56. DÉFINITION. Soit f une fonction n fois dérivable en un point a. On définit alors $P_{f,a,n}$, le *polynôme d'approximation d'ordre n de f en a* par la formule

$$P_{f,a,n}(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Ce polynôme est également appelé *polynôme de Taylor d'ordre n de f en a*.

1.57. PROPOSITION. *Si f est n-fois dérivable en a, alors on a $P'_{f,a,n} = P_{f',a,n-1}$. Autrement dit, $P_{f,a,n}$ est la primitive de $P_{f',a,n-1}$ qui vaut $f(a)$ en a.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de dériver la formule de $P_{f,a,n}$. □

1.58. PROPOSITION. *Le polynôme $P_{f,a,n}$ est l'unique polynôme P tel que pour tout i, $0 \leq i \leq n$, on ait $P^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$.*

DÉMONSTRATION. C'est une une conséquence immédiate du théorème 4.15. □

1.59. THÉORÈME (formule de Taylor-Lagrange). *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction $(n+1)$-fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Pour tous $a, b \in I$, $a \neq b$, il* *existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(b) = P_{f,a,n}(b) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$*, autrement dit*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{1.2}$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle 1.18 à la fonction g définie sur I par

$$g(x) = f(b) - P_{f,x,n}(b) - \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où λ est choisi pour que $g(a) = 0$. On a bien sûr aussi $g(b) = 0$. La fonction g est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et on a

$$g'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \lambda \frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Le théorème de Rolle nous donne donc qu'il existe c tel que $g'(c) = 0$, et donc $\lambda = f^{(n+1)}(c)$. □

1.60. Remarque. En regardant le reste de la formule de Taylor Lagrange, on se doute bien qu'elle peut être prouvée en appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie, dont la dérivée ne fait intervenir que $f^{(n+1)}$, et non pas toutes les autres dérivées de f. La fonction g n'est peut-être pas si simple à deviner, mais c'est par cette propriété qu'on peut la retrouver : dans l'expression de g', les dérivées successives de f se simplifient deux à deux, sauf $f^{(n+1)}$.

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

1.61. Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange). *Sous les même hypothèses, si* $|f^{n+1}|$ *est bornée par un réel* M *sur tout* I*, alors*

$$|f(x) - P_{f,a,n}(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

pour tout $x \in I$*.*

1.62. Remarque. Le corollaire 1.20 du théorème des accroissements finis n'est autre que le cas particulier de l'inégalité de Taylor-Lagrange lorsque $n = 1$.

Nous verrons plus tard deux autres formules de Taylor en 2.10 et 3.42. La différence entre ces trois formules est au niveau du reste, qui peut-être exprimé de différentes manières. Pour le moment, à l'ordre n, nous l'avons exprimé en termes de la valeur de la dérivée $(n+1)$-ième en un point c qu'on ne maîtrise pas totalement. La formule de Taylor-Young 2.10 nous dira plutôt comment se comporte ce reste lorsqu'on s'approche du point a, ce qui donnera un sens plus précis à ce qu'on entend par "approximation" de la fonction. Enfin, la formule de Taylor avec reste intégral 3.42, comme son nom l'indique, exprimera ce reste en termes d'une intégrale, mais nous ne pourrons l'aborder qu'après avoir traité de l'intégration.

Taylor

Brook Taylor (1635-1731) était un mathématicien britannique et un des premiers à avoir fait remarquer l'importance de ces séries de coefficients calculés à partir des dérivées. Il n'est pas le seul, de nombreux autres mathématiciens ont découvert plus ou moins indépendamment des versions de la formule de Taylor. Il semble qu'on doive à Lagrange (1736-1813) d'avoir popularisé l'utilisation de telles séries, et d'avoir donné la preuve générale de la formule de Taylor, ainsi que de l'expression intégrale de son reste.

Voici un exemple d'utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange, qui sort un peu du cadre de ce texte car il utilise la notion de série, mais il est tellement fondamental qu'on l'inclue tout de même.

1.63. Exercice. Considérons la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$. Une telle suite, définie par une sommation, est appelée une série. Ici, nous allons en étudier la convergence, en utilisant les faits (qui seront montrés en 4.27 et 4.28) que exp est sa propre dérivée et que $\exp(0) = 0$. Montrer que u_n est le polynôme de Taylor $P_{\exp,0,n}$. Déduire de l'inégalité de Taylor-Lagrange que $u_n \to \exp(x)$ quand $n \to +\infty$. On écrit alors

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

C'est par la convergence d'une telle formule qu'un ordinateur calcule une valeur approchée de $\exp(x)$ pour un x donné : plus la précision demandée est grande, plus on calcule de termes $x^n/n!$. Notons que n'importe quel terme u_n est un polynôme en x, qu'un ordinateur n'a aucun mal à calculer, en effectuant un nombre fini de sommes, de produits et de divisions, opérations qui sont toutes possibles à l'aide de ses circuits intégrés.

L'étude des séries dites “de Taylor”, de leur convergence et de leurs propriétés constitue un pan entier de l'analyse.

CHAPITRE 2

Développements limités

Faire un développement limité d'ordre n d'une fonction au voisinage de 0, c'est l'approximer par un polynôme de degré au plus n, de manière à ce que le reste (la différence entre la fonction et le polynôme) tende vers 0 plus vite que x^n, c'est-à-dire très vite quand n est grand. En ce sens, plus n est grand, et meilleure est l'approximation.

En pratique, pour obtenir le développement limité d'une fonction, on utilise souvent la formule de Taylor-Young 2.10 ou des théorèmes sur les sommes, les produits, les inverses etc. pour le déduire d'autres développements limités déjà connus.

2.1. Définitions et premières propriétés

Dans ce qui suit, on suppose toujours que les fonctions considérées sont définies sur un domaine U qui contient un intervalle ouvert I qui contient le point a considéré.

2.1. Définition. On dit que f *admet un développement limité à l'ordre* n *en* a s'il existe des réels $b_0, \ldots, b_n$ tels que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n} b_i (x-a)^i}{(x-a)^n} = 0. \tag{2.1}$$

La proposition suivante est une simple reformulation de la définition.

2.2. Proposition. *La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a si et seulement s'il existe des réels $b_0, \ldots, b_n$ et une fonction ϵ définie sur le domaine de f, continue en a telle que $\epsilon(a) = 0$ et pour $x \neq a$, on ait*

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i (x-a)^i \right) + \epsilon(x)(x-a)^n.$$

En pratique, on utilisera donc souvent cette notation, mais il faut faire attention que ϵ ne représente pas souvent la même fonction d'une équation à l'autre.

2.3. Proposition. *La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a si et seulement si la fonction $g : x \mapsto f(a+x)$ admet un développement limité d'ordre n en 0.*

Démonstration. La preuve est triviale et est laissée en exercice. $\square$

Grâce à la proposition précédente, la plupart des preuves de ce chapitre se ramènent au cas où $a = 0$ en remplaçant la variable x par $x - a$, autrement dit la fonction f par la fonction g. Cette réduction facile sera donc toujours laissée au lecteur. On utilisera parfois également que f est n fois dérivable en a si et seulement si $g : x \mapsto f(a+x)$ est n fois dérivable en 0, et les dérivées sont reliées par $g'(0) = f'(a)$.

2.4. Lemme. *Si f admet un développement limité de coefficients $b_0, \ldots, b_n$, alors*

$$b_n = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} b_i (x-a)^i}{(x-a)^n}.$$

Démonstration. C'est clair à partir de la définition. □

2.5. Proposition. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors f admet un développement limité à tout ordre i inférieur ou égal à n, donné par les i premiers coefficients.*

Démonstration. Par récurrence descendante, il suffit de montrer que f admet un développement limité à l'ordre $i = n-1$. On écrit

$$\frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} b_i (x-a)^i}{(x-a)^{n-1}} = (x-a)\left(b_n + \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n} b_i (x-a)^i}{(x-a)^n}\right)$$

et on constate que le terme de droite tend vers 0. □

2.6. Théorème (unicité du développement limité). *Un développement limité à l'ordre n est unique. Autrement dit, s'il existe deux suites de réels $b_0, \ldots, b_n$ et $b'_0, \ldots, b'_n$ satisfaisant à (2.1), alors $b_i = b'_i$ pour tout i de 0 à n.*

Démonstration. On le montre par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a $b_0 = b'_0$ car tous deux sont la limite de f en a. Supposons la propriété vraie pour f, à l'ordre $n-1$. Alors, par la proposition 2.5, les $b_i = b'_i$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. Il ne reste qu'à examiner b_n et b'_n : ils sont égaux car ils valent tous deux la limite qui apparaît dans le lemme 2.4. □

2.7. Définition (partie principale et reste). Si f admet un développement limité d'ordre n avec les b_i comme dans la définition 2.1, on appelle la fonction

$$P_{f,a,n} = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-a)^i$$

la *partie principale* et la différence

$$f - P_{f,a,n} = \epsilon(x)(x-a)^n$$

le *reste* du développement limité de f à l'ordre n.

Les développements limités se comportent bien vis-à-vis des primitives. Montrons tout d'abord un lemme.

2.8. Lemme. *Soit g une fonction dérivable dont la dérivée peut s'écrire $g'(x) = \epsilon_1(x)(x-a)^{n-1}$ avec $n \geq 1$ et $\epsilon_1(x)$ tendant vers 0 quand x tend vers a. Alors $g(x) = g(a) + \epsilon_2(x)(x-a)^n$ où $\epsilon_2(x)$ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers a.*

Démonstration. Il faut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - g(a)|/|x-a|^n < \epsilon$ pour tout $x \neq a$ tel que $|x-a| < \delta$. Par hypothèse sur g', il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout x tel que $|x-a| < \delta$, on a $|g'(x)| < \epsilon |x-a|^{n-1}$. En particulier, lorsque $|y-a| < |x-a| < \delta$, on a $|g'(y)| < \epsilon |x-a|^{n-1}$. Appliquons le corollaire des accroissements finis 1.20 à g entre a et x. On obtient ainsi que $|g(x) - g(a)| < \epsilon|x-a|^n$. □

2.9. Proposition (primitive d'un développement limité). *Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a et que f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en a, alors f admet un développement limité d'ordre n en a où $P_{f,a,n}$ est la primitive de $P_{f',a,n-1}$ dont le coefficient constant est $f(a)$.*

Démonstration. Considérons la fonction $g = f - P_{f,a,n}$ où $P_{f,a,n}$ est comme dans l'énoncé. Alors $g(a) = 0$ et $g'(x) = f'(x) - P_{f',a,n}(x) = \epsilon_1(x)(x-a)^{n-1}$. Par le lemme 2.8, on a $g(x) = \epsilon(x)(x-a)^n$ où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a. Cela prouve précisément que f admet le développement limité annoncé. □

L'exemple classique d'application de ce théorème est le développement limité de la fonction logarithme, la primitive de la fonction inverse, comme on le verra en 4.25.

Nous arrivons maintenant au théorème le plus important du chapitre. Comme on peut s'en douter, les développements limités exprimant le comportement d'une fonction lorsqu'on s'approche d'un point, ils ont un rapport direct avec les dérivées supérieures, quand elles existent. Ce rapport est précisément le sujet de la formule de Taylor-Young, qui fournit le développement limité à partir des dérivées supérieures. En pratique, cela permet d'obtenir des développement limités pour de nombreuses fonctions. C'est donc un théorème important.

2.10. Théorème (formule de Taylor-Young). *Soit f une fonction et a un point dans un intervalle ouvert de son domaine de définition.*

(1) *La fonction f admet un développement limité d'ordre 0 en a si et seulement si elle admet une limite a et le coefficient b_0 est alors cette limite. En particulier, f est continue en a, si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 0 en a de la forme $f(x) = f(a) + \epsilon(x)$.*

(2) *Une fonction f continue en a est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, qui s'écrit alors $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \epsilon(x)(x-a)$.*

(3) *Si la fonction f est n fois dérivable en a, elle admet un développement limité d'ordre n en a dont la partie principale est le polynôme d'approximation à l'ordre n de f en a (voir 1.56). Autrement dit, la partie principale de f à l'ordre n est*

$$P_{f,a,n} = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Démonstration. Les points (1) et (2) ne sont qu'une répétition de la définition ou de sa forme alternative, la proposition 2.2. Pour le point (3), procédons par récurrence sur n. Le théorème est vrai pour $n = 0$, par le point (1). Supposons-le vrai pour $n-1$, et appliquons-le à la fonction f', qui est $n-1$ fois dérivable en a et donc admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a, dont la partie principale est son polynôme de Taylor

$$P_{f',a,n-1} = f'(a) + (x-a)f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a).$$

Notons que la primitive de ce polynôme qui vaut $f(a)$ en a est le polynôme de Taylor de f en a (comme dans la proposition 1.57). Le lemme 2.9 nous donne donc exactement que f admet le développement limité voulu. □

2.11. Remarque. Le point (3) dit précisément que lorsque le polynôme d'approximation de f défini en 1.56 a un sens, il y a un développement limité et ce polynôme est la partie principale du développement limité. C'est la raison pour laquelle on se permet d'utiliser la même notation.

2.12. Remarque. L'information que nous apporte la formule de Taylor-Young est assez différente de celle que nous apporte celle de Taylor-Lagrange 1.59 que nous avons déjà vue, ou celle de Taylor avec reste intégral que nous verrons plus tard en 3.42. Elle exprime le comportement du reste lorsque l'on s'approche du point a.

2.13. Exercice. La fonction qui vaut 1 en $x = 0$ et 0 pour $x \neq 0$ admet-elle un développement limité en 0 ?

⚠ Pour $n \geq 2$, il n'y a plus équivalence entre admettre un développement limité et être dérivable n-fois, comme le montre l'exemple qui suit.

2.14. Exemple. Soit f la fonction définie par $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et 0 pour $x = 0$. Il est facile de montrer que f est continue et dérivable partout y compris en 0 (et calculer sa dérivée) mais n'admet pas de dérivée seconde en 0. Pourtant, il est évident que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0, de partie principale nulle, et de reste égal à f.

2.15. Proposition. *Si f admet un développement limité à l'ordre n de reste identiquement nul, alors f est un polynôme.*

Démonstration. Laissée au lecteur. □

La proposition suivante permet de généraliser la proposition 1.33. Par la formule de Taylor-Young, elle s'applique en particulier au cas où f est n fois dérivable et a ses $n-1$ premières dérivées nulles.

2.16. Proposition. *Si f est une fonction continue en a qui admet un développement limité d'ordre n dont les coefficients $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont nuls et dont le coefficient b_n est non nul. Alors, si n est impair, la fonction $f - f(a)$ change de signe en a. Par contre, si n est pair, alors a est un strict minimum local si $b_n > 0$ et un strict maximum local si $b_n < 0$.*

Démonstration. Écrivons $f(x) - f(a) = (b_n + \epsilon(x))\,(x-a)^n$. Comme $\lim_a \epsilon = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|x - a| < \delta$, on a $\epsilon(x) < |b_n|$ et donc $b_n + \epsilon(x)$ a le signe de b_n. La conclusion est alors claire dans les trois cas. □

2.2. Formules de développement

Tout comme pour la dérivation, il est utile de savoir trouver des développements limités de sommes de fonctions, de produits, de compositions, etc. Cela évite de trop se fatiguer.

2.17. Proposition (développement limité d'une somme). *Soit f (resp. g) une fonction admettant un développement limité d'ordre m (resp. n) en a*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i (x-a)^i + \epsilon(x)(x-a)^m$$

$$\Big(\textit{resp.} \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i (x-a)^i + \epsilon(x)(x-a)^n \ \Big)$$

alors $f+g$ admet un développement limité d'ordre $\min\{m,n\}$ *en a*

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{\min\{m,n\}} (b_i + c_i)(x-a)^i + \epsilon(x)(x-a)^{\min\{m,n\}}.$$

Démonstration. Évidente. □

2.18. Proposition (développement limité d'un produit). *Soient f et g comme dans la proposition précédente. Alors la fonction fg admet un développement limité en a d'ordre $l = \min\{m,n\}$ dont on obtient la partie principale en multipliant celles de f et de g et en tronquant le résultat à l'ordre l (vu comme polynôme en $(x-a)$).*

Démonstration. On commence par tronquer les développements limités de f et de g à l'ordre l par 2.5. Soit P le polynôme obtenu en tronquant $P_{f,l,a}(x)P_{g,l,a}(x)$ à l'ordre l, comme polynômes en $(x-a)$. On a donc $P_{f,l,a}(x)P_{g,l,a}(x) = P + \epsilon_3(x)$ où $\epsilon_3(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a car il est de la forme $(x-a)^{l+1}Q(x)$ où Q est un polynôme. On veut donc montrer que P est la partie principale du développement limité de fg. On écrit alors

$$\begin{aligned} fg(x) &= \left(P_{f,l,a}(x) + \epsilon_1(x)(x-a)^l\right)\left(P_{g,l,a}(x) + \epsilon_2(x)(x-a)^l\right) \\ &= P(x) + \epsilon(x)(x-a)^l \end{aligned}$$

où

$$\epsilon(x) = (\epsilon_3(x) + \epsilon_1(x)P_{g,l,a}(x) + \epsilon_2(x)P_{f,l,a}(x))$$

et tend donc vers 0 quand x tend vers a. □

2.19. Exemple. Soit f une fonction qui admet un développement limité d'ordre 2 en 0 donné par $f(x) = x + x^2 + \epsilon_f(x)x^2$. Alors la fonction f^2 admet le développement limité $f^2(x) = x^2 + \epsilon(x)x^2$.

2.20. Proposition. *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre m en a. Alors la fonction $x \mapsto (x-a)^k f(x)$ admet un développement limité d'ordre $m+k$ en a, de partie principale $(x-a)^k P_{f,n,a}$.*

Démonstration. C'est évident. □

2.21. Remarque. Si f admet un développement limité d'ordre n en a qui commence par un certain nombre de coefficients nuls, et qu'on veut un développement limité de fg pour une fonction g admettant un développement limité d'ordre n en a, il vaut mieux diviser f par h autant de fois que possible avant d'effectuer le produit pour garder la précision maximale.

2.22. Exemple. Dans l'exemple 2.19, on pouvait en fait obtenir un développement limité de f^2 à l'ordre 3 à partir de celui d'ordre 2 de f. En effet, il suffit d'écrire $f(x) = x(1 + x + \epsilon_f(x)x)$, et donc $f^2(x) = x^2(1 + 2x + \epsilon(x)x) = x^2 + 2x^3 + \epsilon(x)x^3$.

2.23. Proposition (développement limité d'une composition). *Supposons que f admet un développement limité d'ordre m en a et g admet un développement limité d'ordre n en b. Supposons de plus que la limite de f en a est b, donc que le terme constant de son développement limité est b. Alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre $l = \min\{m, n\}$ en a dont la partie principale s'obtient en calculant la composition de la partie principale de g et de f et en la tronquant comme un polynôme en $(x - a)$.*

Démonstration. Utilisons les notations

$$f(x) = P(x) + \epsilon_a(x)(x-a)^l \qquad \text{et} \qquad g(x) = Q(x) + \epsilon_b(x)(x-b)^l$$

pour les développements limités de f et g à l'ordre l, où ϵ_a est une fonction qui tend vers 0 en a et ϵ_b une fonction qui tend vers 0 en b. Remplaçons bêtement l'un dans l'autre, on obtient

$$g(f(x)) = Q(f(x)) + \epsilon_b(f(x))(f(x) - b)^l.$$

Notons que $Q(f(x))$ peut s'écrire $R(x) + \epsilon_1(x)(x - a)^l$ où $R(x)$ est la troncation de $Q(P(x))$ à l'ordre l comme polynôme en $(x - a)$, et $\epsilon_1(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en a. De plus, comme le développement limité de f commence par b, la limite de f en a est b et $f(x) - b = (x - a)h(x)$ avec h une fonction continue si $l \geq 1$ ou tend simplement vers 0 si $l = 0$. Donc $\epsilon_b(f(x))$ tend vers 0 en a et $(f(x) - b)^l = (x - a)^l k(x)$ où $k(x)$ est continue. Du coup, la formule plus haut se réécrit

$$g(f(x)) = R(x) + \epsilon(x)(x - a)^l$$

où $\epsilon(x)$ tend vers 0 en a. □

2.24. Exemple. La fonction cos admet un développement limité en 0 à tout ordre n de terme constant 1, et ln admet un développement limité en 1 à tout ordre également, comme nous allons le voir dans la partie 2.3. Admettons-le pour le moment. On peut donc développer $\ln(\cos(x))$ à tout ordre n. Faisons le calcul à l'ordre 4. Bien qu'on puisse appliquer telle qu'elle la proposition, la manière la plus simple de ne pas s'emmêler dans les calculs est de se ramener à des développements limités en 0 en écrivant $\ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x) - 1))$. On a alors

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \epsilon_1(u)u^4$$

qu'on compose avec

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \epsilon_2(x)x^4.$$

On obtient donc comme partie principale

$$(-x^2/2 + x^4/24) - \frac{(-x^2/2 + x^4/24)^2}{2} + \frac{(-x^2/2 + x^4/24)^3}{3} - \frac{(-x^2/2 + x^4/24)^4}{4}$$

tronqué à l'ordre 3. Cela veut dire en particulier que beaucoup de termes sont inutiles à calculer lors du développement des parenthèses : il n'y a en fait que le carré de $-x^2/2$ dans la première parenthèse, et les deux dernières peuvent être oubliées tout de suite, elles ne fourniront aucun terme de degré ≤ 4. On trouve donc $-x^2/2 + x^4/24 - x^4/8 = -x^2/2 - x^4/12$. Le développement limité à l'ordre 4 de $\ln(\cos(x))$ est donc $-x^2/2 - x^4/24 + \epsilon(x)x^4$.

2.25. Proposition (développement limité d'une inverse). *Soit f une fonction ne s'annulant pas sur I, qui admet un développement limité d'ordre n en a dont le terme constant b_0 est non nul. Alors $1/f$ admet un développement limité de même ordre en a. Voir ci-dessous pour la forme de la partie principale.*

Démonstration. On écrit $f = b_0(1+u)$ où $u = (f/b_0) - 1$ admet donc un développement limité d'ordre n en a. On utilise alors la composition des développements limités avec la fonction u et la fonction $x \mapsto 1/(1+x)$, dont le développement est donné dans la partie 2.3. □

2.26. Exemple. Sachant que le développement limité de $\cos(x)$ à l'ordre 4 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \epsilon_1(x)x^4$$

et celui de $1/(1-u)$ est $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \epsilon_2(u)u^4$, développons $1/\cos(x)$ à l'ordre 4. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - x^2/2 + x^4/4! + \epsilon(x)x^4} \\ &= 1 + (x^2/2 - x^4/4! - \epsilon(x)x^4) + (x^2/2 - x^4/4! - \epsilon(x)x^4)^2 + \ldots \\ &= 1 + x^2/2 - x^4/4! + x^4/4 + \epsilon_3(x)x^4 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \epsilon_3(x)x^4\end{aligned}$$

2.27. Proposition (développement limité d'un quotient). *Soient f et g des fonctions admettant un développement limité d'ordre n en a avec g ne s'annulant pas sur I et le coefficient constant du développement limité de g non nul. Alors f/g admet un développement limité d'ordre n en a, et sa partie principale est le quotient Q de la division euclidienne de la partie principale P de f par S, celle de g, selon les puissances croissantes de x, jusqu'à l'ordre n. Voir l'exemple 2.28.*

Démonstration. Supposons que $a = 0$ par translation du développement limité. Écrivons $f(x) = P(x) + \epsilon_1(x)x^n$ et $g(x) = S(x) + \epsilon_2(x)x^n$. Du coup

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{P(x) + \epsilon_1(x)x^n}{S(x) + \epsilon_2(x)x^n} = \frac{P(x)}{S(x)}\left(\frac{1}{1 + \frac{\epsilon_2(x)x^n}{S(x)}}\right) + \frac{\epsilon_1(x)}{S(x) + \epsilon_2(x)x^n}x^n.$$

Comme S a un terme constant non nul, par composition, la grande parenthèse s'écrit $1 + \epsilon_3(x)x^n$ et la fraction de dénominateur $\epsilon_1(x)$ tend vers 0. Pour conclure, il suffit donc de montrer que le quotient de polynômes P/S admet le développement limité spécifié dans l'énoncé (tout le reste est de la forme x^n fois une fonction qui tend vers 0). Or la division euclidienne suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n nous permet d'écrire $P(x) = S(x)Q(x) + x^{n+1}T(x)$ où S et T sont des polynômes. Du coup, on a $P(x)/S(x) = Q(x) + x^n\,(xT(x)/S(x))$ et comme S a un terme constant non nul, $xT(x)/S(x)$ tend vers 0 en 0. La partie principale de P/Q et donc f/g est ainsi égale à Q. □

2.28. Exemple. On peut ainsi déterminer à quoi ressemble n'importe quelle fraction rationnelle F (c'est à dire un quotient d'un polynôme quelconque par un polynôme non nul) au voisinage de zéro. On commence par écrire $F(x) = x^k P(x)/Q(x)$ où $k \in \mathbb{Z}$ et x ne divise ni P ni Q. Du coup, Q satisfait aux hypothèses de la proposition 2.27. On obtient donc un développement limité de P/Q à n'importe quel ordre et dont le coefficient constant est non nul si $P \neq 0$, car c'est la limite de P/Q en zéro et x ne divise ni P ni Q. Finalement, F admet un développement limité en zéro à n'importe quel ordre si et seulement si $k \geq 0$, et sinon on sait tout de même que $F(x)/x^k$ admet un développement limité. Concrètement, regardons l'exemple de $F(x) = (1+x^3)/(1+x+x^2)$, qu'on voudrait développer à l'ordre 5. Posons la division euclidienne.

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
1 & & & +x^3 & & & & 1+x+x^2 \\ \cline{8-8}
-1 & -x & -x^2 & & & & & 1-x+2x^3-2x^4 \\ \cline{1-4}
 & -x & -x^2 & +x^3 & & & & \\
 & x & +x^2 & +x^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 2x^3 & & & & \\
 & & & -2x^3 & -2x^4 & -2x^5 & & \\ \cline{4-6}
 & & & & -2x^4 & -2x^5 & & \\
 & & & & 2x^4 & +2x^5 & +2x^6 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 2x^6 &
\end{array}
$$

ce qui permet donc d'écrire $(1+x^3) = (1+x+x^2)(1-x+2x^3-2x^4) + 2x^6$ et donc $F(x) = 1 - x + 2x^3 - 2x^4 + x^5\epsilon(x)$ où $\epsilon(x) = 2x/(1+x+x^2)$ et tend donc bien vers 0 en 0.

2.29. Remarque. En fait, on n'a pas vraiment besoin de connaître la proposition 2.27 pour calculer le développement limité d'un quotient f/g quand celui de g commence par un coefficient non nul : on peut se ramener à faire le produit du développement limité de f et de celui de $1/g$, obtenu comme dans la preuve de 2.25.

2.30. Remarque. Comme on l'a déjà vu en 2.9, les développements limités se comportent bien lorsqu'on passe à une primitive. Par contre, il n'existe pas vraiment de théorème permettant de déduire l'existence d'un développement limité d'ordre $n-1$ pour f' de l'existence d'un développement limité d'ordre n pour f, comme le montre l'exemple 2.31. Toutefois, si on sait que ce développement existe pour f', alors on a bien $P_{f',a,n-1} = P'_{f,a,n}$ par 2.9.

2.31. Exemple. Considérons la fonction f définie par $x \mapsto x^3 \sin(1/x^2)$ pour $x \neq 0$ et 0 pour $x = 0$. On montre facilement que sa dérivée est donnée par $f'(x) = 3x^2 \sin(1/x^2) - 2\cos(1/x^2)$ pour $x \neq 0$ et 0 pour $x = 0$. Or f admet un développement limité d'ordre 2 en 0, de partie principale nulle. Toutefois, f' n'admet pas de développement limité d'ordre 1 en $x = 0$, puisqu'elle n'a pas de limite en 0.

Voici enfin une propriété classique, qui permet parfois de vérifier qu'on ne s'est pas trompé, ou de gagner du temps lors d'un calcul.

2.32. Exercice. La partie principale d'un développement limité en 0 de fonction paire ne contient que des puissances paires, et celle d'une fonction impaire ne contient que des puissances impaires.

2.3. Développements des fonctions classiques

Voici une liste de fonctions classiques et leurs développements limités en 0. Chacun d'entre eux est prouvé par la suite.

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{1-x} & = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n & +x^n \epsilon(x) \\
\frac{1}{1+x} & = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n & +x^n \epsilon(x) \\
\exp(x) & = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} & +x^n \epsilon(x) \\
\ln(1+x) & = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & +x^n \epsilon(x) \\
(1+x)^\alpha & = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n & +x^n \epsilon(x) \\
\sin(x) & = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} & +x^{2n} \epsilon(x) \\
\cos(x) & = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & +x^{2n} \epsilon(x) \\
\arcsin(x) & = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n)!}{(n!\,2^n)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & +x^{2n+2} \epsilon(x) \\
\arccos(x) & = \pi/2 - \arcsin(x) & \\
\arctan(x) & = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} & +x^{2n} \epsilon(x)
\end{array}$$

Il n'existe pas de forme très simple pour le développement limité de $\tan(x)$, c'est la raison pour laquelle il ne figure pas dans ce tableau. A l'ordre 7, cela donne

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \epsilon(x)x^7.$$

On l'obtient à un ordre arbitraire en faisant le quotient de celui de sin et cos selon la méthode de 2.27. En fait, il est possible d'en exprimer les coefficients en fonctions des nombres de Bernouilli, qui sont des entiers relativement mystérieux mais calculables par récurrence. Nous ne le ferons pas ici.

Dans chacun des cas, il s'agit de prouver que la différence entre la fonction et la partie principale du développement limité est bien de la forme x^n multiplié par une fonction qui tend vers 0 en 0. Aucune des fonctions considérées n'est véritablement définie avant le chapitre 4, et toutes les preuves ci-dessous supposent qu'on a déjà vu leurs définitions et leurs dérivées.

Preuve du d.l. de $1/(1-x)$: On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

et $x/(1-x)$ tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0.

Preuve du d.l. de $1/(1+x)$: Il se déduit aussitôt du précédent en remplaçant x par $-x$.

Preuve du d.l. de $\ln(1+x)$: La fonction ln étant une primitive de la fonction $1/x$ sur $]0, +\infty[$, on obtient ce développement limité par intégration du précédent, par la proposition 2.9, ou bien par la formule de Taylor-Young 2.10, voir le détail en 4.25.

Preuve du d.l. de $\exp(x)$: La fonction exp est dérivable et sa dérivée est elle-même, par la proposition 4.27. Toutes ses dérivées valent donc 1 en 0 et la formule de Taylor-Young 2.10 donne le développement limité.

Preuve du d.l. de $(1+x)^\alpha$: On utilise à nouveau la formule de Taylor-Young. Les dérivées successives sont données par la proposition 4.35.

Preuve du d.l. de $\sin(x)$: La dérivée de sin est cos et celle de cos est $-\sin$, on a immédiatement par récurrence que la dérivée $2n$-ième de sin en 0 est nulle et sa dérivée $(2n-1)$-ième vaut $(-1)^{n-1}$. On applique alors la formule de Taylor-Young 2.10.

Preuve du d.l. de $\cos(x)$: C'est essentiellement la même preuve que pour $\sin(x)$.

Preuve du d.l. de $\arcsin(x)$: On connaît sa dérivée, qui est $(1-x^2)^{-1/2}$ dont on obtient un développement limité en développant $(1+u)^{-1/2}$ et en remplaçant u par $(-x^2)$ en utilisant la composition des développements limités 2.23. Ensuite, on obtient le développement de sa primitive arcsin par la proposition 2.9.

Preuve du d.l. de $\arccos(x)$: Soit on procède comme pour arcsin, soit on part du développement limité d'arcsin et on utilise la relation $\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$.

Preuve du d.l. de $\arctan(x)$: On procède comme pour arcsin. On commence par développer la dérivée de arctan qui est $(1+x^2)^{-1}$, puis on prend la primitive.

2.33. Remarque. Tous les développements limités dans la liste ci-dessus sont en 0. Lorsqu'on veut développer une des fonctions de la liste en $a \neq 0$, il est souvent possible de se ramener à 0 en utilisant des formules calculatoires sur ces fonctions classiques. Par exemple, supposons qu'on veuille développer la fonction $\exp(x)$ en a. On pose $x = a + h$, et on écrit

$$\exp(a+h) = \exp(a)\exp(h) = \exp(a) + \exp(a)h + \exp(a)h^2/2 + \cdots$$

Voici quelques autres formules utiles pour se ramener à 0.

$$\frac{1}{a+h} = \frac{1/a}{1+(h/a)} \qquad \text{pour } a \neq 0;$$

$$\ln(a+h) = \ln(a) + \ln(1+h/a) \qquad \text{pour } a > 0;$$

$$(a+h)^\alpha = a^\alpha\,(1+(h/a))^\alpha \qquad \text{pour } a > 0;$$

$$\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h);$$

$$\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h);$$

$$\tan(a+h) = \frac{\tan(a)+\tan(h)}{1-\tan(a)\tan(h)} \qquad \text{pour } a \neq \pi/2 + k\pi;$$

Pour les trois fonctions trigonométriques inverses, il vaut probablement mieux intégrer les développements limités des dérivées translatées plutôt que de retenir des formules compliquées. Il ne faut bien sûr en apprendre aucune par coeur, mais se rappeler que de telles transformations sont possibles, et les retrouver en cas de besoin.

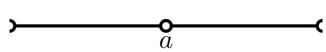
2.4. Notation Landau et équivalents

Dans la littérature mathématique ou physique, on voit souvent employées les notations o et O dues à Edmund Landau (1877-1938). Voici comment elles fonctionnent.

Lorsqu'on effectue des développements limités en 0, on se permet de remplacer par $O(x^n)$ toute fonction f telle que $f(x)/x^n$ est bornée sur un intervalle entourant 0. On remplace aussi par $o(x^n)$ toute fonction f de la forme $f(x) = \epsilon(x)x^n$ où $\epsilon(x)$ tend vers 0 en 0. Cela permet souvent d'écrire rapidement des développements limités. Bien entendu, il y a une ambiguïté puisqu'au cours du même calcul, on remplace souvent par le même nom plusieurs fonctions qui ne sont pas égales. L'idée est qu'on ne se préoccupe pas d'autres propriétés de ces fonctions, parce qu'on veut les négliger, donc on a pas tellement besoin de les identifier toutes une à une précisément. En fait, les notations de Landau sont plus générales, et on peut mettre autre chose à la place de x^n dans la notation, comme nous allons le voir.

Pour tenter de retenir les propriétés calculatoires de ces notations, il faut simplement se rappeler que ces propriétés existent, puis retrouver les bonnes hypothèses parce que ce sont les seules raisonnables. Il faut donc bien comprendre à chaque énoncé pourquoi on ne peut pas espérer grand-chose d'autre.

Dans tout la fin de ce chapitre, sauf mention contraire, on parlera de propriétés vraies *au voisinage* d'un point a. Cela signifie toujours qu'on peut trouver un intervalle ouvert I contenant a tel que la propriété est vraie pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Par exemple, on dira qu'une fonction est définie au voisinage de a, si son domaine de définition U contient $I \setminus \{a\}$ pour un intervalle ouvert I qui contient le point a. Les propriétés qu'on qualifie ainsi, si elles sont vraies pour un certain I, sont vraies pour tous les intervalles ouverts $J \subset I$. Le choix d'un I précis n'est donc pas important, il suffit qu'il en existe un sur lequel la propriété est vraie, et on peut toujours le rendre aussi petit qu'on veut. Par ailleurs, si f est définie en a, sa valeur en a n'a aucune importance pour la vérification de la propriété.



Par exemple, la définition de la limite en a de f (au sens de A.7) ne dépend pas du I choisi, et comme à peu près tout ce qui suit est défini à l'aide de diverses limites en a, on ne se préoccupe pas du choix d'un I particulier.

Il arrive également que la fonction ne soit définie que d'un côté de a, et dans ce cas, l'intervalle I est de la forme $[a, b[$ ou $]b, a]$. On parle alors de voisinage à droite ou à gauche.

2.34. Proposition. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe $M > 0$ et un intervalle ouvert I contenant a tels que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ pour $x \in I$, $x \neq a$.*

(2) *Il existe un intervalle ouvert I contenant a et une fonction bornée $h : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = h(x)g(x)$ pour tout $x \in I$, $x \neq a$.*

Démonstration. Si (1) est satisfait, alors sur I, on définit la fonction h par $h(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$, et $h(x) = 0$ sinon. Si $g(x) = 0$, alors $|f(x)| \leq M \cdot 0 = 0$, donc $f(x) = 0$. Dans tout les cas, on a bien $f(x) = h(x)g(x)$. De plus $|h(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.

Si (2) est satisfait, alors si M est un majorant de $|h|$ sur I, on a $|f(x)| \leq M|g(x)|$ (distinguer si $g(x) = 0$ ou non). □

2.35. Définition (domination). On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a et on note $f = O(g)$ si f et g satisfont aux conditions équivalentes de la proposition 2.34.

2.36. Proposition. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert I contenant a tels que $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ pour $x \in I$, $x \neq a$.*

(2) *Il existe une fonction $h : I \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en a telle que $f(x) = h(x)g(x)$.*

Démonstration. Si (1) est satisfait, alors on définit la fonction h par $h(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$, et $h(x) = 0$ sinon. Alors h tend vers 0 en a. En effet, soit $\epsilon > 0$, sur l'intervalle ouvert I fourni par (1), on a $|h(x)| \leq \epsilon$. De plus, toujours sur I, si $g(x) = 0$, alors $f(x) = 0$ donc on a bien $f(x) = h(x)g(x)$, que $g(x)$ soit nul ou pas.

Si (2) est satisfait, alors si $\epsilon > 0$, comme h tend vers 0, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $|h(x)| \leq \epsilon$ pour $x \in I$, donc $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ (distinguer si $g(x) = 0$ ou non). □

2.37. Définition (négligeabilté). On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a et on note $f = o(g)$ si les conditions équivalentes de la proposition 2.36 sont satisfaites.

2.38. Proposition. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $f - g = o(g)$

(2) *Il existe une fonction h définie au voisinage de a et tendant vers 1 en a telle que $f(x) = h(x)g(x)$.*

Démonstration. Si (1) est satisfait, alors on définit la fonction h par $h(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$, et $h(x) = 1$ sinon. Alors h tend vers 1 en a. En effet, soit $\epsilon > 0$, il existe une fonction h_0 définie au voisinage de a telle que $|f(x) - g(x)| \leq |h_0(x)||g(x)|$. Cela implique que si $g(x) = 0$, alors $f(x) = 0$. Donc dans tout les cas, $f(x) = h(x)g(x)$. Pour un x donné, soit $g(x) = 0$, auquel cas $h(x) = 1$ et donc $|h(x) - 1| \leq |h_0(x)|$ de manière évidente, soit $g(x) \neq 0$, auquel cas $|h(x) - 1| = |f(x)/g(x) - 1| \leq |h_0(x)|$. Donc $h(x) - 1$ tend vers 0, et $h(x)$ tend vers 1.

Si (2) est satisfait, alors $f(x) - g(x) = (h(x) - 1)g(x)$ donc $f - g = o(g)$. □

2.39. Définition (équivalence). On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a et on note $f \sim g$ si les conditions équivalentes de la proposition 2.38 sont satisfaites.

Lorsqu'il y a une ambiguïté sur le point a, on peut parfois l'adjoindre à la notation, comme dans $O_a(g)$, $o_a(g)$ ou $f \underset{\mathrm{a}}{\sim} g$.

Notons tout de suite quelques conséquences à retenir.

2.40. Proposition. *Une fonction est $O(1)$ si et seulement si elle est bornée au voisinage de a. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f = O(g)$ si et seulement si f/g est borné au voisinage de a.*

2.41. Proposition. *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f = o(g)$ si et seulement si f/g tend vers 0 en a.*

2.42. Proposition. *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f \sim g$ équivaut à $\lim_a f/g = 1$.*

Il est assez classique d'utiliser la notation o pour écrire et manipuler des développements limités. On écrira donc

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &= \ln(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).\end{aligned}$$

Plus généralement, avec la notation o, un développement limité de f à l'ordre n en 0 s'écrit

$$f(x) = P_{f,a,n}(x) + o(x^n).$$

2.43. Proposition. *Si f admet un développement limité de la forme $f(x) = ax^n + o(x^n)$ avec $a \neq 0$, alors f est équivalente à la fonction ax^n.*

Démonstration. Clair. □

Voyons maintenant quelques propriétés structurelles de ces notations.

2.44. Proposition. *La relation $\sim$ au voisinage de a est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que*

(1) *Pour tout f, on a $f \sim f$.*
(2) *On a $f \sim g$ si et seulement si $g \sim f$.*
(3) *Si $f \sim g$ et $g \sim h$, alors $f \sim h$.*

Démonstration. Les trois points sont clairs en utilisant la fonction $h(x)$ tendant vers 1 telle que $f(x) = h(x)g(x)$. □

2.45. Proposition. *La relation o vérifie les points suivants.*

(1) *Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.*
(2) *Si $f = o(f)$, alors f est nulle au voisinage de a.*

Démonstration. Le point (1) est clair par la propriété 2.41. Pour le point (2), raisonnons par l'absurde. Si f n'est nulle sur aucun voisinage de a, alors il existe une suite de réels x_i tendant vers a pour lesquels $g(x_i) \neq 0$. Mais si $f = o(f)$, alors par 2.41, on a $f(x) = \epsilon(x)f(x)$ où la fonction ϵ tend vers 0 en a, ce qui est impossible car elle doit avoir la valeur 1 en tous les x_i. □

2.46. Proposition. *La relation O vérifie les points suivants*

(1) *Pour tout f, on a $f = O(f)$.*
(2) *Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = O(h)$.*
(3) *Si $f = O(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.*

Démonstration. Laissée au lecteur. □

Ces deux dernière propositions disent que les relations o et O ont des propriétés similaires à $<$ et $\leq$, respectivement.

Voici maintenant un lien entre la notion d'équivalent et celle de limite.

2.47. Proposition. *Si $f \sim g$ et si g admet une limite en a, alors f admet la même limite.*

Démonstration. Évident. $\square$

Enfin, voyons les propriétés calculatoires usuelles de compatibilité à la somme, au produit, etc.

2.48. Proposition. *La notation O est compatible à la somme et au produit :*

(1) *Si $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g)$, alors $f_1 + f_2 = O(g)$.*
(2) *Si $f_1 = O(g_1)$ et $f_2 = O(g_2)$, alors $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.*

Démonstration. Laissé au lecteur. $\square$

2.49. Proposition. *La notation o est compatible à la somme et au produit :*

(1) *Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$.*
(2) *Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.*

Démonstration. Laissé au lecteur. $\square$

2.50. Proposition. *Si $f \sim g$, alors $f = O(g)$ et $g = O(f)$.*

Démonstration. On a $f = (1 + \epsilon)g$ pour une fonction ϵ tendant vers 0 en a. En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, on ait $|\epsilon| < 1$, donc $|f(x)| < 2|g|$. On conclue de même que $g = O(f)$ en utilisant le point (2) de 2.44. $\square$

2.51. Proposition. *La relation d'équivalence $\sim$ est compatible*

(1) *au produit : si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;*
(2) *à l'inverse : si $f \sim g$ et g ne s'annule pas au voisinage de a (ou f, de manière équivalente), alors $1/f \sim 1/g$;*

Démonstration. Laissée au lecteur. $\square$

Il n'y a pas de compatibilité évidente entre l'équivalence et la somme.

Pour la proposition suivante, on suppose qu'on a déjà défini et montré les propriétés usuelles des fonctions exponentielle, logarithme et puissance, qu'on trouve exposées dans la section 4.2.

2.52. Proposition. *La relation d'équivalence $\sim$ est compatible*

(1) *à l'exponentielle : $\exp(f) \sim \exp(g)$ si et seulement si $g = f + o(1)$.*
(2) *au logarithme : supposons $f, g > 0$ au voisinage de a, et que g admet une limite $l \neq 1$ en a (mais éventuellement $l = 0$ ou $l = +\infty$). Alors $f \sim g$ implique $\ln(f) \sim \ln(g)$.*
(3) *aux puissances : si $f, g > 0$ au voisinage de a. Alors $f \sim g$ implique que $f^\alpha \sim g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour le point (1), remarquons d'abord que $\exp(f)$ et $\exp(g)$ sont strictement positives, donc $\exp(f) \sim \exp(g)$ si et seulement si le rapport $\exp(f)/\exp(g) = \exp(f - g)$ tend vers 1. Or pour toute fonction h définie au voisinage de a, on a $\lim_a \exp(h) = 1$ si et seulement si $\lim_a h = 0$. En effet, un sens provient de la continuité du logarithme, et l'autre de l'exponentielle. Avec $h = f - g$, on a donc le résultat.

Pour le point (2), on applique le point 1 à $\ln(f)$ et $\ln(g)$, ce qui nous dit que $f \sim g$ est équivalent à $\ln(f) = \ln(g) + o(1)$. Or, que la limite de g en a soit 0, $l \neq 1$ ou $+\infty$, la fonction $\ln(g)$ admet une limite non nulle (éventuellement $-\infty$ ou $+\infty$). Dans tous les cas, $\ln(f) - \ln(g) = o(1)$ implique $\ln(f) - \ln(g) = o(\ln(g))$. □

2.53. Exemple. Si f est une fonction telle que $\lim_a f = 0$, alors

$$\ln(1 + f(x)) \sim f(x) \qquad \text{et} \qquad \exp(f(x)) - 1 \sim f(x).$$

On a $\lim_0 \ln(1 + x)/x = 1$ car c'est le taux de variation en 1 de ln et la dérivée de ln en 1 vaut 1. De même $\lim_0(\exp(x) - 1)/x = 1$. Par composition des limites, on a le résultat.

2.54. Exemple. Calculons la limite en 0 (par valeurs positives) de $f(x) = x^{v(x)-1}$ où $v(x) = x^x$. On a $f(x) = \exp((v(x) - 1)\ln(x))$ par définition de la fonction puissance. Or $v(x)-1 = \exp(x\ln(x))-1$ et $x\ln(x)$ tend vers 0 en 0 par 4.38, donc par l'exemple précédent, $v(x)-1 \sim x\ln(x)$, donc $(v(x)-1)\ln(x) \sim x\ln(x)^2$ et ce dernier tend vers 0. Par 2.47, $(v(x) - 1)\ln(x)$ tend aussi vers 0 et par continuité de l'exponentielle, $f(x)$ tend vers 1 en 0.

2.55. Exercice. Calculer la limite de la suite $u_n = (1 + x/n)^n$ pour un réel $x > 0$ en utilisant les propriétés classiques du logarithme et de l'exponentielle et des fonctions puissances montrées en 4.2 et 4.3.

CHAPITRE 3

Intégrales de Riemann

Vous savez certainement que l'intégrale d'une fonction est censée être l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe, au moins quand cette fonction est positive. Malheureusement, cela n'est pas une notion bien rigoureuse, tout simplement parce qu'il faudrait encore expliquer clairement ce qu'on entend par "aire", donc en donner une définition précise, ce qui ramène à peu près au problème de départ. L'objet de ce chapitre est justement de donner une construction précise qui définit l'intégrale de certaines fonctions et de montrer que le résultat obtenu a bien les propriétés qu'on espère. Par exemple, on veut que l'intégrale de la somme de deux fonctions soit la somme des intégrales, etc.

En résumant beaucoup, on définit l'intégrale d'une fonction en la coinçant entre des rectangles posés sur l'axe des abscisses et au-dessous ou au-dessus de la fonction pour minorer ou majorer l'intégrale (voir figure 7). On décide alors qu'on veut absolument que l'aire d'un rectangle soit sa base fois sa hauteur et on calcule la somme des aires des rectangles au-dessous, et de même pour ceux au-dessus. Quand on s'approche du même nombre par au-dessous et par au-dessus en prenant des rectangles de largeur de plus en plus petite, c'est que le processus fonctionne bien, on dit que la fonction est intégrable et on définit l'intégrale comme ce nombre limite.

Riemann

Cauchy

Cette construction, que nous allons voir en détail, est due à Bernhard Riemann (1826-1866), un des mathématiciens les plus importants du 19ème siècle et qui a révolutionné aussi bien la théorie des nombres que la géométrie et l'analyse. Il n'est pas le premier à s'intéresser à l'intégration. Isaac Newton (1643-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), pères du calcul infinitésimal, ont tous deux manipulé l'intégration, le symbole $\int$ étant d'ailleurs dû à ce dernier. Mais à leur époque, les mathématiques n'avaient pas de bases aussi solides et formelles, et on peut en quelque sorte dire qu'ils manipulaient des intégrales sans vraiment les avoir définies. La construction de Riemann n'est pas non plus la première tentative de construire une théorie cohérente, précise et bien définie de l'intégration. Avant lui, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) avait défini une intégrale pour des fonctions continues dans son *Cours d'analyse* de 1821, avec d'ailleurs une erreur dans la preuve principale. Mais toutes les fonctions n'étant pas continues, Riemann a voulu donner un cadre plus général à la notion d'intégrale. Ses travaux apparaissent dans sa thèse d'habilitation de 1853 intitulée *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* (Sur la représentation d'une fonction en série trigonométrique) et plus précisément dans le chapitre *Über den Begriff eines bestimmten Integrals und dem Umfang seiner Gültigkeit* (Sur la notion d'intégrale définie et son domaine de validité). Ce sont leur formulation moderne que nous allons étudier. Après lui, de nombreux autres mathématiciens ont encore étendu cette notion, le plus célèbre d'entre eux étant probablement Henri Léon Lebesgue (1875-1941), dont la théorie de l'intégration généralise encore celle de Riemann par une approche assez différente. Alors, pensez-vous sûrement, pourquoi apprendre la construction de Riemann plutôt que celle de Lebesgue directement, au fond ? Une réponse possible est que celle de Riemann demande moins de prérequis et est probablement un peu plus intuitive lors d'une première approche. Une autre raison est que l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue donnent le même résultat partout où la première est définie et que le théorème fondamental de l'analyse 3.33 se prouve naturellement à l'aide de la construction de Riemann et on ne fait que s'y ramener lorsqu'on utilise celle de Lebesgue. L'intégrale de Riemann est donc un première étape plus ou moins incontournable pour qui s'intéresse à l'intégration.

3.1. Construction de l'intégrale

On veut donc construire pour une quantité raisonnable de fonctions une notion d'intégrale. Nous allons nous limiter pour le moment à discuter l'intégration d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est bornée. La première étape consiste à regarder des fonctions en escalier, c'est-à-dire constantes sur des petits morceaux de $[a, b]$. Pour ces fonctions, l'intégrale qu'on veut définir est claire, parce qu'on sait très bien ce qu'on veut choisir pour l'aire d'un rectangle : sa largeur fois sa hauteur. Ensuite, on va tenter de coincer f par au-dessus et par en-dessous entre de telles fonctions en escalier. Commençons donc par discuter un peu des propriétés des fonctions en escalier. Elles sont toutes évidentes, mais faisons-le un peu formellement pour avoir de bonnes bases et un bon langage pour la suite.

3.1. Définition (subdivision). Une *subdivision* de $[a, b]$ est un ensemble fini $\mathcal{D} = \{x_0, \dots, x_n\}$ de réels tels que $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$. On dit qu'une subdivision $\mathcal{D}'$ *raffine* $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$.

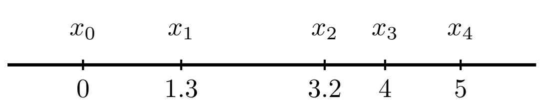


Figure 1. La subdivision $\mathcal{D} = \{0, 1.3, 3.2, 4, 5\}$ de $[a, b] = [0, 5]$

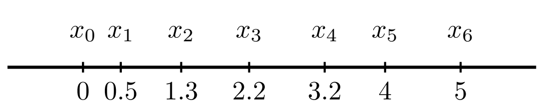


Figure 2. La subdivision $\mathcal{D}' = \{0, 0.5, 1.3, 2.2, 3.2, 4, 5\}$ raffine $\mathcal{D}$

3.2. Définition (fonction en escalier). On dit qu'une fonction $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *en escalier* et que ses sauts sont dans $\mathcal{D}$ si e est constante sur tous les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$.

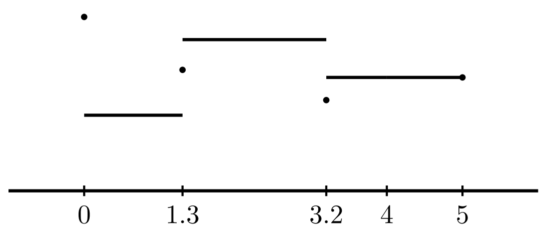


Figure 3. Une fonction f en escalier dont les sauts sont dans la subdivision $\mathcal{D}$

3.3. Définition. Soit e une fonction en escalier. Il existe une plus petite subdivision $\mathcal{D}$ pour laquelle e a ses sauts dans $\mathcal{D}$ (plus petite est à prendre au sens de l'inclusion). C'est l'ensemble des points de discontinuité de e auxquels on rajoute a et b. On appelle cette subdivision *la subdivision associée à* e ou plus simplement *la subdivision de* e ou encore on dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des sauts de e.

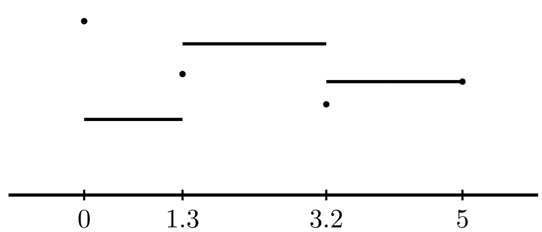


Figure 4. L'ensemble des sauts de la fonction f de la figure 3 est $\{0, 1.3, 3.2, 5\}$

Venons-en maintenant à l'intégration des fonctions en escalier. Pour une telle fonction, voici donc comment on veut définir l'intégrale :

3.4. Définition (intégrale d'une fonction en escalier). Soit e une fonction en escalier sur $[a, b]$ dont les sauts sont dans $\mathcal{D}$. On définit son intégrale comme

$$\int_a^b e = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) e_i$$

où e_i est la valeur de e sur $]x_{i-1}, x_i[$.

3.5. Remarque. La valeur de l'intégrale ne dépend pas de l'ensemble $\mathcal{D}$ du moment que les sauts de e sont dans $\mathcal{D}$. Cela se vérifie facilement. On peut donc la calculer en prenant pour $\mathcal{D}$ exactement l'ensemble de ses sauts et rien de plus.

Les valeurs de e en les points de $\mathcal{D}$ sont donc sans influence sur l'intégrale de e, comme on peut s'y attendre.

Passons maintenant à la définition de l'intégrale pour d'autres fonctions que les fonctions en escalier, qui sont tout de même un peu trop simples. Bien entendu, on

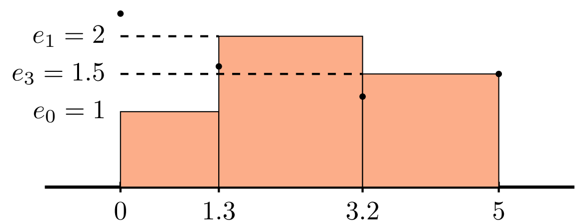


FIGURE 5. L'intégrale de la fonction en escalier e est obtenue en sommant les valeurs $(x_i - x_{i-1})e_i$. On trouve ici $\int_0^5 e = 1.3 \times 1 + 1.9 \times 2 + 1.8 \times 1.5 = 7.8$

va tout de même se baser sur les intégrales de fonctions en escalier pour construire les intégrales d'autres fonctions.

3.6. DÉFINITION. Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Soit $e^+(f, \mathcal{D})$ la fonction en escalier définie par $x \mapsto f(x)$ si $x \in \mathcal{D}$ et $x \mapsto \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x)$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$. C'est la plus grande fonction en escalier par rapport à $\mathcal{D}$ qui est plus petite que f. De même, on définit $e^-(f, \mathcal{D})$ en remplaçant sup par inf.

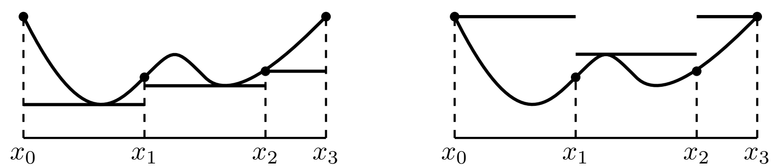


FIGURE 6. Une fonction f, la subdivision $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ avec à gauche sa fonction $e^-(f, \mathcal{D})$ et à droite la fonction $e^+(f, \mathcal{D})$.

3.7. REMARQUE. Le fait que f est bornée implique que les sup et inf considérés dans la définition ci-dessus existent bien, car les ensembles considérés sont non-vides et majorés ou minorés.

3.8. DÉFINITION (sommes minorante et majorante). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On note

$$s(f, \mathcal{D}) = \int_a^b e^-(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=0}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x)$$

$$S(f, \mathcal{D}) = \int_a^b e^+(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=0}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x)$$

et on appelle $s(f, \mathcal{D})$ la *somme minorante* de f relativement à $\mathcal{D}$ et $S(f, \mathcal{D})$ la *somme majorante*.

La somme majorante donne donc l'intégrale de la plus petite fonction en escalier qui majore f et dont les sauts sont dans $\mathcal{D}$, et la somme minorante donne l'intégrale de la plus grande fonction en escalier qui minore f et dont les sauts sont dans $\mathcal{D}$.

3.9. LEMME. *Pour toute fonction f bornée sur $[a, b]$ et toutes subdivisions $\mathcal{D}$ de $[a, b]$, telles que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$, on a*

$$s(f, \mathcal{D}) \leq s(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}).$$

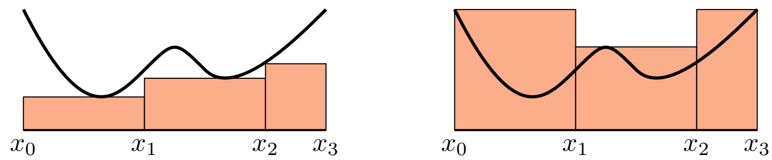
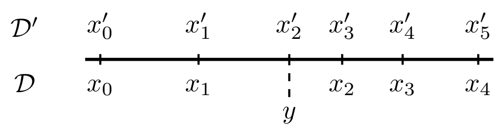


FIGURE 7. Une fonction f, la subdivision $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ avec l'aire en couleur qui est égale à gauche à $s(f, \mathcal{D})$ et à droite à $S(f, \mathcal{D})$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord que pour toute subdivision $\mathcal{D}$, on a $s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D})$, puisque $\inf_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x) \leq \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x)$ pour tout i. Cela montre l'inégalité centrale. Montrons celle de gauche, la preuve de celle de droite est similaire. Par récurrence, il suffit de la montrer lorsque $\mathcal{D}'$ contient un seul point de plus que $\mathcal{D}$. Supposons que ce point y de $\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}$ est entre x_{k-1} et x_k. On a alors



$$\inf_{x \in]x_{k-1}, x_k[} f(x) \leq \inf_{x \in]x_{k-1}, y[} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in]x_{k-1}, x_k[} f(x) \leq \inf_{x \in]y, x_k[} f(x),$$

donc

$$\begin{aligned}(x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in]x_{k-1}, x_k[} f(x) &= ((x_k - y) + (y - x_{k-1})) \inf_{x \in]x_{k-1}, x_k[} f(x) \\ &\leq (x_k - y) \inf_{x \in]y, x_k[} f(x) + (y - x_{k-1}) \inf_{x \in]x_{k-1}, y[} f(x)\end{aligned}$$

et tous les autres termes dans les sommes définissant $s(f, \mathcal{D})$ et $s(f, \mathcal{D}')$ sont identiques. □

En d'autres termes on a toujours $s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D})$ et quand on raffine la subdivision $\mathcal{D}$, le nombre $S(f, \mathcal{D})$ diminue et $s(f, \mathcal{D})$ augmente.

3.10. LEMME (clé). *Si f est une fonction bornée sur $[a, b]$ et si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux subdivisions, alors*

$$s(f, \mathcal{D}') \leq s(f, \mathcal{D} \cup \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D} \cup \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}).$$

On peut bien sûr inverser le rôle de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence évidente du lemme précédent. □

Ce lemme veut donc dire que pour une fonction f donnée, le s d'un subdivision ne peut jamais être plus grand que le S d'une autre.

Naturellement, on veut qu'une définition raisonnable de l'intégrale de f fasse que cette intégrale soit comprise entre $s(f, \mathcal{D})$ et $S(f, \mathcal{D})$ pour toute subdivision $\mathcal{D}$ (voir figure 7). En fait, cette condition est suffisamment forte pour servir de définition à l'intégrale.

3.11. Définition (fonction intégrable et intégrale). Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Définissons

$$I^{-}(f)=\sup_{\mathcal{D}}\int_a^b e^{-}(f,\mathcal{D})$$
$$I^{+}(f)=\inf_{\mathcal{D}}\int_a^b e^{+}(f,\mathcal{D}).$$

On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si $I^{-}(f) = I^{+}(f)$. On note alors la valeur commune $\int_a^b f$ et on l'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Notons que les sup et inf existent car la fonction f est bornée et toute partie non vide majorée d'un ensemble de nombres réels admet un plus petit majorant, c'est-à-dire un sup.

Avant de parler de l'intégrale d'une fonction f, il convient donc de vérifier qu'elle est intégrable.

3.12. Exemple. La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ n'est pas intégrable. En effet, on montre facilement que toute fonction en escalier qui minore f est d'intégrale ≤ 0, alors que toute fonction en escalier qui majore f est d'intégrale ≥ 1. Du coup, $I^{-}(f) = 0$ alors que $I^{+}(f) = 1$.

Pour noter l'intégrale de f, on utilise aussi la notation $\int_a^b f(x)\,dx$. Elle est utile lorsque la fonction f n'a pas été véritablement nommée, par exemple, on peut écrire $\int_0^1 x^2\,dx$ et le petit dx sert à rappeler la variable de la fonction, ce qui est surtout utile lorsque la fonction dépend d'autres paramètres comme dans

$$\int_0^1 xy^2\,dx \neq \int_0^1 xy^2\,dy.$$

Dans le premier cas, on intègre en fait la fonction $x \mapsto xy^2$ (y étant fixé) et dans le deuxième cas, on intègre la fonction $y \mapsto xy^2$ (x étant fixé). Dans ce cours, on utilisera les deux notations, en choisissant la plus pratique selon le contexte.

Pour vérifier qu'une fonction est intégrable, il est parfois pratique d'utiliser le critère ci-dessous, qui est presque une reformulation de la définition.

3.13. Proposition. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. La fonction f est intégrable si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision $\mathcal{D}$ telle que*

$$S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) \leq \epsilon.$$

Démonstration. Si f est intégrable, alors il suffit de choisir deux subdivisions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles

$$\int_a^b f - s(f,\mathcal{D}_1) \leq \epsilon/2 \qquad \text{et} \qquad S(f,\mathcal{D}_2) - \int_a^b f \leq \epsilon/2,$$

ce qui est possible par définition de $I^{+}(f) = I^{-}(f)$. Définissons alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. On a alors les inégalités

$$S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}_2) - s(f,\mathcal{D}_1) = S(f,\mathcal{D}_2) - \int_a^b f + \int_a^b f - s(f,\mathcal{D}_1) \leq \epsilon,$$

la première provenant du lemme clé 3.10. Réciproquement, si pour tout ϵ, il existe une subdivision $\mathcal{D}$ telle que $S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) \leq \epsilon$, alors $I^{+}(f) - I^{-}(f) \leq \epsilon$ pour tout ϵ, donc $I^{+}(f) = I^{-}(f)$. □

Par définition, ici, toutes les fonctions intégrables sur $[a, b]$ sont bornées. On ne le rappellera donc pas dans ce qui suit. Nous allons maintenant prouver toutes les propriétés naturelles de l'intégrale.

3.14. Proposition (somme). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors la somme $f + g$ est intégrable et son intégrale est donnée par*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Démonstration. Tout d'abord, pour tout intervalle $I \subset [a, b]$, on a

$$\inf_I f + \inf_I g \leq \inf_I (f+g)$$

et donc pour toute subdivision $\mathcal{D}$ on a

$$s(f, \mathcal{D}) + s(g, \mathcal{D}) \leq s(f+g, \mathcal{D})$$

et l'inégalité opposée pour les S. D'où, à l'aide du lemme clé 3.10, la suite d'inégalités

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{D}_1) + s(g, \mathcal{D}_2) &\leq s(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) + s(g, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \leq s(f+g, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \\ &\leq S(f+g, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \leq S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) + S(g, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \leq S(f, \mathcal{D}_1) + S(g, \mathcal{D}_2). \end{aligned}$$

Utilisons le critère 3.13. Soit $\epsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe une subdivision $\mathcal{D}$ telle que $S(f+g, \mathcal{D}) - s(f+g, \mathcal{D}) \leq \epsilon$. Par ce même critère, il existe $\mathcal{D}_1$ telle que $S(f, \mathcal{D}_1) - s(f, \mathcal{D}_1) \leq \epsilon/2$ et $\mathcal{D}_2$ telle que $S(g, \mathcal{D}_2) - s(g, \mathcal{D}_2) \leq \epsilon/2$. La suite d'inégalités assure que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ convient. □

3.15. Proposition (fonction constante). *La fonction constante sur $[a, b]$ donnée par $x \mapsto 1$ est intégrable et son intégrale vaut*

$$\int_a^b 1\, dx = b - a$$

Démonstration. C'est immédiat, en choisissant la subdivision triviale. □

3.16. Proposition (multiplication par une constante). *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la fonction λf est intégrable et son intégrale est donnée par*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Démonstration. Si $\lambda \geq 0$, pour tout ensemble de réels E borné, on a

$$\inf \lambda E = \lambda \inf E \quad \text{et} \quad \sup \lambda E = \lambda \sup E.$$

Du coup, pour toute subdivision $\mathcal{D}$, on a $s(\lambda f, \mathcal{D}) = \lambda s(f, \mathcal{D})$ et $S(\lambda f, \mathcal{D}) = \lambda S(f, \mathcal{D})$, et de nouveau par la même propriété, on a $I^-(\lambda f) = \lambda I^-(f) = \lambda I^+(f) = I^+(\lambda f)$, ce qui prouve le résultat.

Lorsque $\lambda = -1$, pour un ensemble borné, on a

$$\inf -E = -\sup E \quad \text{et} \quad \sup -E = -\inf E.$$

Du coup, on a $s(-f, \mathcal{D}) = -S(f, \mathcal{D})$ et $S(-f, \mathcal{D}) = -s(f, \mathcal{D})$ pour toute subdivision $\mathcal{D}$ et $I^-(-f) = -I^+(f) = -I^-(f) = I^+(-f)$.

En combinant le cas $\lambda \geq 0$ et le cas $\lambda = -1$, on obtient le cas $\lambda < 0$. □

Regroupons les propositions 3.14 et 3.16 en un théorème.

3.17. Théorème (linéarité de l'intégrale). *Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et λ et μ sont des réels, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable, et*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$ munies de l'addition et de la multiplication par un réel forme un espace vectoriel, et l'intégration est une application linéaire de cet espace vectoriel vers $\mathbb{R}$.

3.18. Proposition (coïncidence). *Toute fonction en escalier e sur $[a,b]$ est intégrable et son intégrale selon la définition 3.11 donne le même résultat que celle de la définition 3.4.*

Démonstration. Si $\mathcal{D}$ est la subdivision associée à la fonction e, on a $s(e,\mathcal{D}) = S(e,\mathcal{D})$ et tous deux valent l'ancienne définition de l'intégrale 3.4 spécifique aux fonctions en escalier, ce qui montre que $I^-(e) = I^+(e)$ a cette même valeur. □

La proposition précédente montre donc qu'on a généralisé la définition de l'intégrale des fonctions en escaliers à une classe plus grande de fonctions mais qu'on a heureusement pas changé au passage le résultat sur les fonctions en escalier elles-mêmes.

3.19. Proposition (majoration). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, et telles que $f \le g$, autrement dit $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors on a*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Démonstration. Pour toute subdivision $\mathcal{D}$, on a $s(f,\mathcal{D}) \le s(g,\mathcal{D})$ ce qui montre que $\int_a^b f = I^-(f) \le I^-(g) = \int_a^b g$. □

3.20. Corollaire. *Soit f une fonction* positive *intégrable sur $[a,b]$, avec $a < b$, qui vérifie l'une des conditions suivantes :*

(1) *$f \ge \epsilon > 0$ sur $[a,b]$;*

(2) *f est continue et pour au moins un $c \in [a,b]$, on a $f(c) > 0$.*

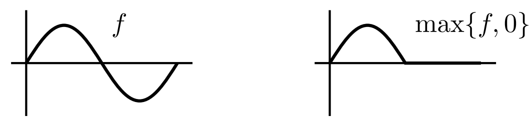
Alors $\int_a^b f > 0$.

Démonstration. Le point 1 est une conséquence directe de la proposition 3.19 appliquée à la fonction f et à la fonction constante $g = \epsilon$ dont l'intégrale est $(b-a)\epsilon > 0$.

Montrons le point 2. Choisissons $\epsilon = f(c)/2$ Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x dans $I = [a,b] \cap [c-\delta, c+\delta]$, intervalle de longueur $l(I) > 0$, on ait $f(x) \ge f(c) - \epsilon = f(c)/2 > 0$. Considérons maintenant une subdivision $\mathcal{D}$ de $[a,b]$ de manière à ce que I forme un intervalle de la subdivision. On aura alors immédiatement $\int_a^b f \ge s(f,\mathcal{D}) \ge l(I)f(c)/2 > 0$. □

3.21. Proposition. *Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors $x \mapsto \max\{f(x),0\}$ l'est, ainsi que $x \mapsto \min\{f(x),0\}$ et $|f|$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ une subdivision, soient $m_i = \inf_{]x_{i-1},x_i[} f$ et $M_i = \sup_{]x_{i-1},x_i[} f$ et soient m_i' et M_i' les quantités correspondantes pour $\max\{f,0\}$. Alors, sur $]x_{i-1},x_i[$, si $f \ge 0$, on a $\max\{f,0\} = f$ donc $M_i - m_i = M_i' - m_i$.



Si $f \leq 0$, on a $\max\{f,0\} = 0$ donc $M'_i = m'_i = 0$. Si f a des valeurs strictement positives et d'autres strictement négatives, alors $m'_i = 0$, $M_i = M'_i$ et $m_i < 0$. Dans tous les cas, on a $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$. Cela implique que pour toute subdivision $\mathcal{D}$, on a $S(\max\{f,0\},\mathcal{D}) - s(\max\{f,0\},\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D})$. Il est alors facile d'appliquer le critère 3.13 pour conclure.

Le même raisonnement montre le résultat pour $\min\{f,0\}$. On conclue alors en utilisant $|f| = \max\{f,0\} - \min\{f,0\}$ et le théorème 3.17. $\square$

Montrons maintenant deux résultats assez utiles.

3.22. Proposition. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Démonstration. Tout d'abord, $|f|$ est intégrable par la proposition 3.21. Puis comme $f \leq |f|$, on a $\int f \leq \int |f|$ par la proposition 3.19 et de même $-f \leq |f|$ donc $-\int f = \int(-f) \leq \int |-f| = \int |f|$. On a donc

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

qui se regroupe en l'inégalité attendue. $\square$

3.23. Corollaire. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et M un majorant de $|f|$. Alors*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq (b-a)M.$$

Démonstration. L'intégrale $\int |f|$ est majorée par $(b-a)M$ en utilisant la subdivision triviale. $\square$

Bien que le corollaire précédent paraisse trivial, il est souvent utile, surtout sur des intervalles qu'on peut choisir assez petits. Voir par exemple la preuve du théorème 3.32.

3.24. Proposition. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors f^2 est intégrable et fg est intégrable.*

Démonstration. Comme $f^2 = |f|^2$ et qu'on a déjà vu en 3.21 que $|f|$ est intégrable, on peut supposer que f est positive. Soit M un majorant de f, soit $\mathcal{D}$ une subdivision de $[a,b]$ et soient $m_i = \inf_{]x_{i-1},x_i[} f$ et $M_i = \sup_{]x_{i-1},x_i[} f$. On a alors $m_i^2 = \inf_{]x_{i-1},x_i[} f^2$ et $M_i^2 = \sup_{]x_{i-1},x_i[} f^2$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a supposé f positive. On a alors $M_i^2 - m_i^2 =$

$(M_i + m_i)(M_i - m_i) \le 2M(M_i - m_i)$ et donc

$$\begin{aligned} S(f^2,\mathcal{D}) - s(f^2,\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i^2 - m_i^2) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) 2M(M_i - m_i) \\ &= 2M(S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D})) \end{aligned}$$

On conclue donc en appliquant le critère 3.13 à f pour prouver qu'il est également satisfait pour f^2, puisque M est fixé.

La fonction f^2 est donc intégrable. On en déduit l'intégrabilité du produit fg en remarquant que $fg = \left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)/4$. □

En fait, le théorème précédent sur f^2 est une conséquence d'un théorème plus général :

3.25. Théorème (composition). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et dont l'image est incluse dans $[c,d]$. Soit $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable.*

Nous n'en exposerons pas la preuve ici, mais on peut utiliser l'uniforme continuité et le même type de raisonnement que la preuve du théorème 3.27 plus bas.

3.26. Théorème. *Toute fonction croissante sur $[a,b]$ est intégrable. Toute combinaison linéaire de fonctions croissantes est intégrable, et en particulier toute fonction décroissante, toute différence de fonctions croissantes et toute fonction monotone par morceaux (avec un nombre fini de morceaux).*

Démonstration. Tout d'abord, une fonction croissante sur $[a,b]$ est bornée car pour tout x, on a $f(a) \le f(x) \le f(b)$. Ensuite, sur tout intervalle $]c,d[$ dans $[a,b]$, on a $\inf_{]c,d[} f(x) \ge f(c)$ et $\sup_{]c,d[} f(x) \le f(d)$. Soit $\delta > 0$. Il est facile de trouver une subdivision $\mathcal{D}$ telle que $x_i - x_{i-1} \le \delta$ pour tout i, $1 \le i \le n$. On a

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left(\sup_{]x_{i-1},x_i[} f(x) - \inf_{]x_{i-1},x_i[} f(x) \right) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \delta \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) \\ &= \delta \left(f(b) - f(a) \right). \end{aligned}$$

Pour conclure pour les fonctions croissantes, il suffit donc d'appliquer le critère 3.13 en prenant $\delta = \epsilon / \left(f(b) - f(a) \right)$. Pour les combinaisons linéaires de fonctions croissantes, on applique le théorème 3.17.

Remarquons que f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante, donc c'est effectivement un cas particulier de combinaison linéaire de fonctions croissantes.

Pour les fonctions monotones par morceaux, on montre d'abord qu'une fonction g croissante (ou décroissante) sur un intervalle $[c,d] \subset [a,b]$ et nulle en dehors de $[c,d]$ s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions croissantes en utilisant des marches de Heaviside (une marche de Heaviside est une fonction nulle jusqu'à un certain réel, puis qui vaut 1 après, voir après la preuve de 3.33). Ensuite, on montre qu'une fonction monotone par morceaux est égale à une somme de telles fonctions g. Alternativement, on peut utiliser le théorème 3.29 ci-dessous. □

Prouvons encore un résultat qui permet souvent de ne plus réfléchir du tout à l'intégrabilité.

3.27. Théorème. *Toute fonction continue sur* $[a, b]$ *est intégrable. Toute fonction continue par morceaux sur* $[a, b]$ *est intégrable (nous supposons ici qu'une telle fonction a un nombre fini de discontinuité, et une limite à droite et à gauche en ces discontinuités).*

Démonstration. Nous donnons ici la preuve classique qui utilise l'uniforme continuité [1], rappelée en A.10, parce que c'est probablement la manière la plus intuitive de procéder. Supposons que $b \neq a$, sinon le théorème est trivial. Tout d'abord, toute fonction continue est bornée par A.9. Appliquons le critère 3.13. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $\epsilon' > 0$, par uniforme continuité A.10, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in [a, b]$ avec $|x - x'| < \delta$, on a $|f(x) - f(x')| < \epsilon'$. On vérifie alors facilement que pour tout intervalle $]c, d[$ avec $d-c < \delta$ et pour tous $x, x' \in]c, d[$, on a alors $\sup_{]c,d[} f(x) - \inf_{]c,d[} f(x) \leq \epsilon'$. Pour toute subdivision $\mathcal{D}$ telle que $x_i - x_{i-1} < \delta$ pour tout i, on a donc

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\epsilon' = (b - a)\epsilon'.$$

Étant donné un $\epsilon > 0$, il suffit donc de choisir un $\epsilon' < \epsilon/(b-a)$ et une $\mathcal{D}$ appropriée pour vérifier le critère 3.13.

On remarque ensuite qu'une fonction continue par morceau est somme d'une fonction continue et d'une fonction en escaliers (exercice : le prouver), toutes deux intégrables. □

3.28. Remarque. Le champ d'application des théorèmes 3.26 et 3.27 ne sont pas les mêmes. Bien que ce ne soit pas très facile à construire et que cela semble défier l'intuition première, il existe des fonctions continues qui ne sont monotones sur aucun sous-intervalle de leur domaine de définition, et donc en particulier ne sont pas monotones par morceaux. Nous l'avons déjà mentionné après la définition 1.8. Il existe aussi des fonctions continues (et même dérivables) qui ne sont pas différence de deux fonctions croissantes. La fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto x^2 \sin(1/x^4)$ pour $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$ est une telle fonction, mais il est malaisé de le montrer sans savoir que la série $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge, ce qui est hors cadre de ce texte.

Arrêtons-nous un peu pour regarder en arrière le chemin parcouru. Bien que la définition de la notion d'intégrabilité semble inutilisable en pratique au premier abord, nous en avons peu à peu tiré des critères et des propriétés simples à l'aide desquelles nous sommes maintenant capables de montrer que toutes les fonctions classiques de la table 1 sont intégrables sur tout intervalle fermé, car elles sont toutes continues par morceaux ou même monotones par morceaux, ce qui se voit à

1. Pour les curieux, il existe une autre preuve, voir par exemple [Spi80, Th. 13-3 p. 278] qui n'utilise pas l'uniforme continuité et qui est intéressante, car elle prouve en même temps le théorème fondamental 3.33.

l'aide de leurs dérivées. Ce que nous ne sommes pas encore capables de faire, c'est de donner des expressions explicites, en termes de ces mêmes fonctions classiques, pour leurs intégrales. Nous y reviendrons dans la partie 3.2.

3.29. Théorème. *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et $u \in [a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est intégrable sur $[a, u]$ et sur $[u, b]$, ce qui est un petit abus de langage pour dire que les restrictions de f à $[a, u]$ et à $[u, b]$ sont intégrables. De plus on a $\int_a^b f = \int_a^u f + \int_u^b f$.*

Démonstration. On passe facilement d'une assertion à l'autre en utilisant le critère 3.13, dans un sens en concaténant deux subdivisions, et dans l'autre en raffinant une subdivision pour avoir le point u dedans. □

3.30. Notation. Lorsque $a \leq b$, on définit $\int_b^a f$ comme égal à $-\int_a^b f$.

La principale justification de cette notation est de ne pas se préoccuper de la position relative de a, b et c dans l'énoncé du théorème suivant.

3.31. Théorème (relation de Chasles). *Soit f une fonction intégrable sur un segment qui contient a, b et c. On a alors*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la notation et du théorème 3.29, en remmettant les bornes dans l'ordre croissant. □

⚠ Dans la proposition 3.19, si les bornes ne sont pas dans l'ordre croissant, cela change le signe des intégrales et retourne donc l'inégalité. De même, dans la proposition 3.22, le terme de gauche ne change pas, mais le terme de droite doit être muni d'un signe moins. Par contre, le corollaire 3.23 s'emploie tel quel, puisque les signes sont absorbés par la valeur absolue. Il faut donc faire particulièrement attention lors de l'emploi de la notation 3.30.

3.32. Théorème. *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Définissons la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_a^x f$. La fonction F est continue.*

Démonstration. Soit $M > 0$ un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$. Par la relation de Chasles 3.31 puis par le corollaire 3.23, on a

$$|F(x + h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f \right| \leq |h| M.$$

Par conséquent, si $|h| < \epsilon/M$, on a $|F(x + h) - F(x)| < \epsilon$, ce qui montre la continuité. □

Le théorème qu'on vient de montrer est tout de même une assez bonne surprise, car il y a des fonctions assez pathologiques qui sont intégrables, elles peuvent être discontinues à de nombreux endroits. Et bien malgré cela, la fonction F définie comme ci-dessus est, elle, toujours continue.

3.2. Le théorème fondamental de l'analyse

Le théorème fondamental de l'analyse dit que sous des hypothèses raisonnables, l'intégration et la dérivation sont des opérations inverses l'une de l'autre, ce qui n'a rien d'évident à priori quand on regarde leurs définitions.

3.33. Théorème (dit théorème fondamental de l'analyse). *Soit $f :]u,v[\to \mathbb{R}$ une fonction* continue *et soit $a \in]u,v[$. Soit $F :]u,v[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Alors F est dérivable sur $]u,v[$ et on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]u,v[$, autrement dit $F' = f$.*

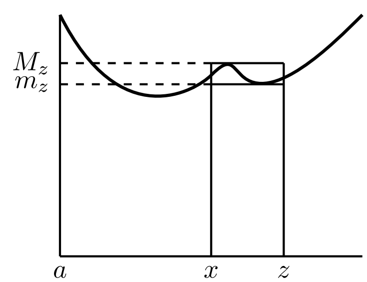
Démonstration. On veut montrer que F est dérivable en x et que son nombre dérivé en x est bien $f(x)$. Calculons donc le taux de variation de F entre un point x (fixé par la suite) et un point z que nous ferons tendre vers x :

$$\Delta_F(x,z) = \frac{F(z) - F(x)}{z - x} = \frac{\int_a^z f - \int_a^x f}{z - x} = \frac{\int_x^z f}{z - x}.$$

La dernière égalité suit de la relation de Chasles 3.31. Définissons les deux quantités

$$m_z = \inf_{t \in]x,z[} f(t) \qquad \text{et} \qquad M_z = \sup_{t \in]x,z[} f(t)$$

(voir figure). Encadrons ensuite $\int_x^z f$ en utilisant m_z et M_z. Par définition de



l'intégrale, lorsque $x \leq z$, on obtient en utilisant la subdivision triviale $\{x, z\}$

$$(z - x)m_z \leq \int_x^z f \leq (z - x)M_Z$$

dont on tire

$$m_z \leq \Delta_F(x,z) \leq M_z.$$

De même, lorsque $z \leq x$, on a $\int_x^z f = -\int_z^x f$ et

$$(x - z)(-M_z) \leq \int_z^x (-f) \leq (x - z)(-m_z),$$

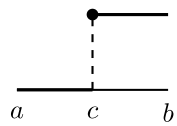
ce qui donne à nouveau

$$m_z \leq \Delta_F(x,z) \leq M_z.$$

Or, lorsque z tend vers x, les nombres m_z et M_z tendent vers $f(x)$, puisque la fonction f est continue, donc $\Delta_F(x,z)$ a une limite et cette limite est $f(x)$. □

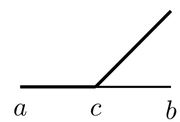
Si f n'est pas continue, la conclusion du théorème fondamentale est fausse en général. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder l'exemple le plus simple de fonction qui n'est pas continue, la marche de Heaviside (au point c). Il s'agit de la fonction

$$H_c : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < c\,; \\ 1 & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$



Prenons maintenant un intervalle $]u, v[$ qui contient c, et $a < c$. Comme H_c est une fonction en escalier, on a immédiatement que

$$F(x) = \int_a^x H_c = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq c\,; \\ (x - c) & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$



Or cette fonction F n'est pas dérivable en c.

On sait depuis le théorème 1.12 qu'étant donnée une fonction f définie sur un intervalle, s'il existe des fonctions F telles que $F' = f$, elles sont toutes identiques à une constante additive près. Pratiquement, les théorèmes 3.33 et 1.12 rendent donc trivial le calcul de beaucoup d'intégrales, comme l'explique le corollaire suivant.

3.34. Corollaire. *Soit f une fonction continue*[2] *sur $[a, b]$ telle que $f = g'$ pour une certaine fonction g, autrement dit g est une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Démonstration. Posons $F(x) = \int_a^x f$. On a alors par le théorème fondamental que $F' = f = g'$. Par conséquent, par le théorème 1.12, on a $F = g + k$ où k est une constante. Mais $F(a) = 0$, donc $k = -g(a)$. Par conséquent $F(x) = g(x) - g(a)$, et en particulier $F(b) = g(b) - g(a)$. □

Bien entendu, si l'on choisit une autre primitive, comme elle diffère de g d'une constante, le résultat ne change pas. Les primitives de beaucoup de fonctions classiques (mais pas toutes...), sont aussi des fonction classiques. Quand on est dans ce cas, il suffit de regarder sa liste, et le tour est joué.

Lorsqu'on ne voit pas directement une primitive d'une fonction, il existe deux techniques majeures pour essayer de se ramener à quelque chose de connu : l'intégration par parties et le changement de variable. Toutes deux sont des conséquences simples du théorème fondamental.

Nous utiliserons la notation pratique suivante : pour une fonction h, on écrit $[h(x)]_a^b$ la différence $h(b) - h(a)$.

2. On peut en fait améliorer un peu les hypothèses de cet énoncé, en supposant que f n'est pas nécessairement continue, mais est la dérivée d'une fonction, et est intégrable. Voir [Spi80, th. 2 p. 272].

3.35. Théorème (intégration par parties). *Soit $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables de dérivées continues*[3]*, alors on a*

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Démonstration. Par la formule de dérivée d'un produit 1.22, on a $(uv)' = u'v + uv'$ et on voit sur le terme de droite que c'est une fonction continue. Le corollaire 3.34 appliqué à uv donne donc $\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b$, et donc le résultat en séparant l'intégrale de la somme $u'v + uv'$ en deux par 3.14. □

Cela s'utilise dans le cas où on veut calculer l'intégrale d'une fonction f qu'on décompose en $f = u'v$, où u' est bien sûr la dérivée d'une fonction u qu'on connaît. Évidemment, ça n'est intéressant que dans le cas où l'intégrale de uv' est plus facile à calculer que celle de $u'v$. Il peut y avoir plusieurs manière de décomposer f en un produit, ce qui fait que l'application de ce théorème n'est pas automatique, il faut parfois faire quelques essais. L'exemple classique est celui du calcul de l'intégrale de la fonction ln.

3.36. Exemple. Pour calculer l'intégrale $\int_a^b \ln$ avec $a, b > 0$. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1/x$ (par définition de ln, voir 4.18). Cela donne immédiatement

$$\int_a^b \ln(x) = [x\ln(x)]_a^b - \int_a^b 1 = b\ln(b) - a\ln(a) - (b-a).$$

En d'autres termes, une primitive de ln est $x \mapsto x\ln(x) - x$.

3.37. Exercice. Appliquer deux fois l'intégration par parties à $x \mapsto \exp(x)\sin(x)$ et à $x \mapsto \exp(x)\cos(x)$ pour trouver une primitive de chacune.

3.38. Théorème (changement de variable). *Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [u,v] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue telle que $g([u,v]) \subset I$. Alors*

$$\int_{g(u)}^{g(v)} f(t)\,dt = \int_u^v f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f (par exemple $F : x \mapsto \int_a^x f$, $a \in I$). Par le corollaire 3.34, le terme de gauche vaut $F(g(v)) - F(g(u))$. Par la formule de dérivation d'une composée 1.23, on a $(F \circ g)' = (F' \circ g).g' = (f \circ g).g'$, donc $F \circ g$ est une primitive de $(f \circ g).g'$ et toujours par 3.34, le terme de droite vaut aussi $F(g(v)) - F(g(u))$. □

Une sorte de moyen mnémotechnique de se rappeler cette formule est d'imaginer que le symbole t est une fonction de x ; on utilise alors directement la notation $t = g(x)$. Puis on imagine que le symbole d dans le dt de l'intégrale se comporte comme une dérivation par rapport à t et on écrit alors $dt = d(t(x)) = g'(x)dx$. Cette formule rappelle fortement la notation de Leibniz (que nous n'utilisons pas) pour la dérivation : $dt/dx = g'(x)$. On voit alors apparaître $f(t)dt = f(g(x))g'(x)dx$. Il ne reste plus qu'à se rappeler des bornes de l'intégrale, mais si on sait que g

3. En fait, l'amélioration expliquée dans la note 2 permet d'améliorer à son tour le théorème d'intégration par parties en supposant seulement que u et v sont dérivables et de dérivées intégrables (et non nécessairement continues).

intervient quelque part, il faut forcément que ce soit dans le membre de gauche car c'est $t = g(x)$ qui peut varier entre $g(u)$ et $g(v)$.

3.39. Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (par exemple un polynôme). Alors

$$\int_a^{a+2\pi} f(\sin(x))\cos(x)\,dx = 0.$$

En effet, en posant $g = \sin$, on obtient par changement de variable

$$\int_{\sin(a)}^{\sin(a+2\pi)} f(t)\,dt$$

qui est nulle car $\sin(a) = \sin(a + 2\pi)$.

Souvent, on se trouve en présence de $\int f(g(t))\,dx$, et on voudrait pouvoir changer en la variable $x = g(t)$. Or aucun des deux termes de la formule de changement de variable de 3.38 ne ressemble tout-à-fait à cette intégrale. Il est tout de même possible de faire quelque chose dans le cas où la fonction g est bijective (ce qui n'est pas le cas de l'exemple précédent). On peut alors reformuler le théorème :

3.40. Corollaire. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : [a, b] \to [g(a), g(b)]$ une fonction bijective et de réciproque g^{-1} dérivable et de dérivée continue. Alors*

$$\int_a^b f(g(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)(g^{-1})'(t)\,dt.$$

Démonstration. On applique le changement de variable 3.38 aux fonctions $f \circ g$ et g^{-1} là où il y avait f et g, et en posant $u = g(a)$ et $v = g(b)$. □

3.41. Exemple. Calculons $\int_a^b 1/(1 - \exp(-x))\,dx$ avec $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Posons le changement de variable bijectif $g(x) = \exp(-x)$, et donc $g^{-1} = -\ln$ et $(g^{-1})'(t) = -1/t$. On obtient alors

$$\int_a^b \frac{1}{1-\exp(-x)}dx = \int_{\exp(-a)}^{\exp(-b)} -\frac{1}{t(1-t)}dt.$$

On termine le calcul en notant que $\frac{1}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}$ a pour primitive $\ln(t) - \ln(1-t)$. On obtient donc

$$\int_a^b \frac{1}{1-\exp(-x)}dx = b - a + \ln\left(\frac{1-\exp(-b)}{1-\exp(-a)}\right).$$

Dans tout cet exemple, on a implicitement utilisé les propriétés des fonctions logarithmes et exponentielles qui sont prouvées en partie 4.2.

Notons qu'avec la notation de Leibniz, on aurait écrit $t = \exp(-x)$, $dt = -\exp(-x)dx$ donc $dx = -(1/t)dt$ et on aurait remplacé.

Savoir effectuer les bons changements de variable est tout un art, et les logiciels de calcul formel, tels Mathematica ou Maple, sont programmés de manière à tenter de se ramener à des formes connues en effectuant formellement un certain nombre de changements de variables. Fabriquer des algorithmes pour cela est compliqué, et il n'y a pas de théorie achevée sur ce sujet, même dans le cadre de composées de fonctions assez simples. Il y a toutefois des familles de fonctions que l'on sait intégrer par ces méthodes, et il faut faire beaucoup d'exercices pour reconnaître ces familles.

3.3. Formule de Taylor avec reste intégral

Le calcul intégral permet d'avoir une expression exacte du reste dans la formule de Taylor, sous certaines conditions sur la fonction.

3.42. Théorème (formule de Taylor avec reste intégral). *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction $(n+1)$-fois dérivable sur un intervalle ouvert I et dont la dérivée $(n+1)$-ième est continue*[4]*. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_n(f,a,b)$$

où

$$R_n(f,a,b) = \frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\, dx$$

Démonstration. Pour $n = 0$, la formule devient $f(b) = f(a) + \int_a^b f'$ et est vraie par le corollaire 3.34. Montrons le théorème par récurrence sur n. Supposons le vrai au rang $n-1$ et prouvons-le au rang n. Pour cela, intégrons par parties le reste $R_{n-1}(f,a,b)$ en posant $u(x) = -(b-x)^n/n!$, $v(x) = f^{(n)}(x)$ et donc $u'(x) = (b-x)^{n-1}/(n-1)!$ et $v'(x) = f^{(n+1)}(x)$. On trouve alors

$$\begin{aligned} R_{n-1}(f,a,b) &= \left[-\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right]_a^b + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\, dx \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(f,a,b) \end{aligned}$$

et donc en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1}(f,a,b) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + (b-a)^n f^{(n)}(a) + R_n(f,a,b) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_n(f,a,b) \end{aligned}$$

□

3.43. Remarque. Les hypothèses de la formule de Taylor avec reste intégral sont les mêmes que celles de la formule de Taylor-Lagrange 1.59, sauf que l'on demande en plus que la dérivée $(n+1)$-ième soit continue. On y gagne toutefois quelque chose, car l'expression du reste sous forme intégrale peut nous apporter des informations sur la régularité de ce reste, lorsque b varie. Par exemple, le théorème fondamental de l'analyse 3.33 implique que $R_n(f,a,b)$ est une fonction continue en b, ce qu'on ne voit pas sur la formule de Taylor-Lagrange, et pas plus sur celle de Taylor-Young.

Par ailleurs, les formules de Taylor-Lagrange et de Taylor avec reste intégral permettent toutes deux dans certains cas de majorer le reste, et en particulier d'en

4. En fait, on peut se contenter de supposer que $f^{(n+1)}$ est intégrable, en raffinant un peu la preuve, et à condition d'avoir montré l'intégration par parties 3.35 sous les hypothèse plus faibles de la note 3. Voir [Spi80, th. 4 p. 391].

déduire que la série de Taylor converge (c'est-à-dire la suite des polynômes de Taylor quand n tend vers l'infini, x étant fixé). Les calculs de séries n'étant pas l'objet de ce cours, on ne reviendra pas sur cet aspect. Il est toutefois fondamental, et fera nécessairement partie de la suite du cours d'analyse.

3.4. Sommes de Riemann

Gardons notre notation pour une subdivision $\mathcal{D} = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$. Le théorème suivant explique qu'on peut approcher l'intégrale d'une fonction continue par à peu près n'importe quoi de raisonnable.

3.44. Théorème (sommes de Riemann). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $\mathcal{D}$ telle que $x_i - x_{i-1} < \delta$ pour tout i et pour tous $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, on ait*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| < \epsilon.$$

Démonstration. On choisit, comme dans la preuve de 3.27 un δ qui assure que pour toute subdivision $\mathcal{D}$ telle que $x_i - x_{i-1} < \delta$ pour tout i, on ait $S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \epsilon$. Parce que f est continue, $\inf_{]x_{i-1}, x_i[} \leq f(z_i) \leq \sup_{]x_{i-1}, x_i[} f(x)$. On a également, par définition de $s(f, \mathcal{D})$ et $S(f, \mathcal{D})$,

$$s(f, \mathcal{D}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, \mathcal{D})$$

et par définition de l'intégrale

$$s(f, \mathcal{D}) \leq \int_a^b f \leq S(f, \mathcal{D}).$$

On obtient donc le résultat. □

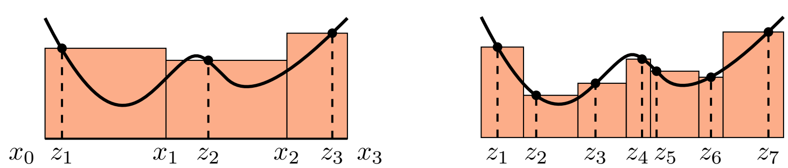


Figure 8. L'intégrale de la fonction f est approchée par deux sommes de Riemann. Chaque z_i est entre x_{i-1} et x_i et on utilise pour approximer l'intégrale des rectangles de hauteur $f(z_i)$. À droite, la taille maximale des écarts $x_i - x_{i-1}$ est moindre.

Ce théorème est en fait valable pour tout fonction intégrable (et non seulement continue), mais la preuve est plus technique. En fait, cet énoncé est parfois utilisé à la place de 3.11 pour définir l'intégrale : on pose qu'une fonction est intégrable quand une telle somme converge, et on montre toutes les propriétés de l'intégration à partir de là. C'est à peu près l'approche historique de Riemann. À mon sens, c'est techniquement plus difficile, et ce cours est donc construit à partir de la définition 3.11.

De manière surprenante, le théorème 3.44 est souvent utilisé pour calculer des limites de suites données par une somme de Riemann quand on connaît déjà le résultat de l'intégrale pour d'autres raisons. En voici une.

3.45. EXERCICE. Calculer l'intégrale de $\sin^2$ et celle de $\cos^2$ entre 0 et π en trouvant deux relations entre les deux : la première grâce à une relation trigonométrique bien connue, et la deuxième par changement de variable. En déduire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\pi/n).$$

CHAPITRE 4

Fonctions classiques

Il y a un certain nombre de fonctions classiques que le lecteur connaît surement, mais qu'il n'est pas totalement immédiat de définir rigoureusement. Dans ce chapitre, nous allons fournir une véritable définition pour la fonction logarithme et la fonction exponentielle et nous en déduirons leurs propriétés usuelles. En fait, pour cela, nous nous appuierons de manière essentielle sur la définition rigoureuse de l'intégrale de Riemann vue précédemment, ce qui explique que ces fonctions ne soient pas si faciles à définir de manière élémentaire. Nous allons également brièvement suggérer comment définir les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et comment obtenir leurs propriétés importantes.

4.1. Polynômes

Une fonction polynôme est particulièrement simple, parce qu'elle se construit en un nombre fini de produits et de sommes à partir de fonctions constantes et de la fonction identité. Pour une valeur de x donnée, il est donc facile de calculer explicitement la valeur d'un polynôme en x. Contrairement à d'autres fonctions que nous allons voir, il n'y a pas besoin, par exemple, d'utiliser une limite pour définir un polynôme. De plus, on sait à peu près tout ce qu'on veut sur leurs dérivées et leurs primitives successives. C'est justement parce les polynômes sont si simples à calculer qu'on les utilise pour approximer d'autres fonctions, lorsqu'on effectue des développements limités. Voyons donc un certain nombre de propriétés agréables des polynômes.

4.1. Définition. Une fonction polynôme est une fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui peut s'écrire

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$$

où les a_i, $i \in \mathbb{N}$ sont des réels dont *seuls un nombre fini sont non nuls.* La somme est donc en fait finie.

Dans ce qui suit, on raccourcira l'expression "fonction polynôme" en "polynôme".

4.2. Proposition. *Soient p_1 et p_2 deux polynômes. Alors p_1+p_2, p_1p_2 et $p_1 \circ p_2$ sont des polynômes.*

Démonstration. Écrire $p = \sum_0^n a_i x^i$ et faire une récurrence sur n. $\square$

Si p_1 et p_2 sont deux polynômes, $p_1 \circ p_2$ n'est pas égal en général à $p_2 \circ p_1$. Par exemple, si $p_1(x) = x^2$ et $p_2(x) = x+1$, alors $p_1 \circ p_2(x) = (x+1)^2 = x^2+x+1$ alors que $p_2 \circ p_1(x) = x^2 + 1$.

4.3. Exemple. Le polynôme $x \mapsto p(x - x_0) + y_0$ est un polynôme de même degré que p. Son graphe est celui de p mais avec l'origine translatée en (x_0, y_0).

4.4. Proposition (continuité d'un polynôme). *Tout polynôme est une fonction continue.*

Démonstration. C'est une somme finie de produit de fonctions continues. □

4.5. Proposition (dérivée d'un polynôme). *Un polynôme constant est bien entendu dérivable et de dérivée nulle. Soit p le polynôme donné par $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Alors p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est un polynôme donné par*

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule de dérivation d'une puissance entière, prouvée dans la partie 1.5. □

Par exemple, la dérivée du polynôme $x^3 + 4x + 1$ est $3x^2 + 4$.

4.6. Définition. Soit p un polynôme non nul. Le plus grand i tel que $p^{(i)}(0) \neq 0$ est appelé le degré de p et noté $\deg(p)$. On définit le degré de la fonction nulle comme $-\infty$.

4.7. Proposition. *Le degré de p' est égal au degré de p moins 1 (sauf si p est constant).*

4.8. Proposition. *Si p s'écrit $p(x) = \sum a_i x^i$, son degré est aussi le plus grand i tel que a_i est non nul.*

Démonstration. La dérivée j-ème de la fonction $x \mapsto x^i$ est nulle en zéro sauf si $i = j$. □

4.9. Proposition. *Étant donné un polynôme p, pour tout i, le coefficient a_i devant x^i est unique. On l'appelle le coefficient de degré i de p.*

Démonstration. Par différence, on se ramène à montrer que si $0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, alors tous les a_i sont nuls. C'est une conséquence de la proposition 4.8. □

4.10. Proposition. *Soient p_1 et p_2 deux polynômes. On a*

$$\deg(p_1 + p_2) \leq \max(\deg p_1, \deg p_2)$$

avec inégalité stricte que si $\deg(p_1) = \deg(p_2) = d$ et le coefficient de degré d de p_1 est l'opposé du coefficient de degré d de p_2. De plus

$$\deg(p_1 p_2) = \deg(p_1) + \deg(p_2)$$

et

$$\deg(p_1 \circ p_2) = \deg(p_1) \deg(p_2)$$

à moins que p_1 et p_2 soient tous deux nuls.

Démonstration. Pour la somme et le produit, c'est clair en utilisant la proposition 4.8. Pour la composée, cela peut se montrer par récurrence. □

4.11. Définition. On appelle *racine* ou *zéro* d'un polynôme p un nombre réel z tel que $p(z) = 0$.

4.12. Lemme. *Pour tout entier $i \geq 1$, on a la formule*

$$x^i - z^i = (x-z)(x^{i-1} + zx^{i-2} + \cdots + z^{i-2}x + z^{i-1}).$$

Démonstration. Il suffit de développer le terme de droite. □

4.13. Proposition. *Soit z une racine de p. Alors $p(x)$ se factorise en $(x-z)\,q(x)$ où q est un polynôme.*

Démonstration. On écrit

$$p(x) = p(x) - p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x^i - z^i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(x-z)(x^{i-1} + zx^{i-2} + \cdots + z^{i-2}x + z^{i-1}) = (x-z)q(x)$$

où $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x^{i-1} + zx^{i-2} + \cdots + z^{i-2}x + z^{i-1})$ est une somme de polynômes donc un polynôme. □

4.14. Corollaire. *Un polynôme de degré n a au plus n racines.*

Démonstration. Par récurrence, en appliquant la proposition précédente. □

4.15. Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Étant donnés $n+1$ nombres réels b_i, $i = 0 \ldots n$, il y a un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à n et tel que $p^{(i)}(a) = b_i$ pour tout $i \leq n$. Il est donné par la formule*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{i!}(x-a)^i.$$

Démonstration. La fonction q donnée par $q(x) = p(x-a)$ est un polynôme de même degré que p par la proposition 4.10. De plus pour tout $i \geq 0$, on a $q^{(i)}(x) = p^{(i)}(x-a)$ par récurrence, en appliquant la formule de dérivation des fonctions composées 1.23. Cela montre qu'on peut se ramener au cas où $a = 0$. Toujours par récurrence et en appliquant la même formule 1.23, pour tout i, la dérivée i-ème de $x \mapsto x^{(j)}$ est $(j!/(j-i+1)!)\,x^{(j-i)}$ si $i \leq j$ et 0 si $i > j$. En particulier, prise en a, on trouve 0 sauf si $i = j$, auquel cas on trouve 1. Cela montre que le polynôme défini par la formule de l'énoncé satisfait bien aux conditions. L'unicité se ramène par différence au cas où tous les b_i sont nuls (et toujours $a = 0$). Le résultat suit alors de la proposition 4.8 : le polynôme doit être nul puisqu'il est de degré $\leq n$ alors que toutes ses dérivées sont nulles. □

4.16. Proposition (primitives d'un polynôme). *Soit p le polynôme donné par $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Alors le polynôme $\sum_{i=1}^{n+1} (a_{i-1}/i)x^i$ est une primitive de p et les autres primitives diffèrent d'une constante additive.*

Démonstration. Il est clair par dérivation que le polynôme en question est une primitive de p, et on sait par 1.12 que toutes les autres diffèrent d'une constante additive. □

On en déduit par récurrence :

4.17. Corollaire. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : U \to \mathbb{R}$ dont la dérivée n-ième est un polynôme pour un certain $n \in \mathbb{N}$ est un polynôme. C'est en particulier le cas si cette dérivée n-ième est nulle.*

4.2. Logarithme et exponentielle

Nous arrivons maintenant aux premières fonctions classiques dont la définition n'est pas totalement triviale parce qu'elle fait intervenir d'une manière ou d'une autre une limite. Commençons par le logarithme. C'est une fonction qui a la propriété de transformer les produits en sommes, et c'est plus ou moins la recherche d'une telle propriété qui a conduit à l'introduction historique du logarithme, pour des raisons calculatoires : il est plus rapide de faire une addition qu'une multiplication. Il n'est pas compliqué de montrer qu'une telle fonction, si elle est dérivable, doit être une primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ (à une constante multiplicative près, voir l'exercice 4.21) et qu'on peut donc la définir comme une intégrale, d'après le théorème fondamental de l'analyse 3.33. C'est John Napier (1550-1617, en français Neper), qui a inventé le logarithme et en a donné des tables de calcul. En son honneur, on appelle maintenant logarithme népérien la plus naturelle des fonctions logarithmiques et la seule dont nous allons vraiment discuter ici, la primitive de la fonction inverse. Les autres, comme le logarithme décimal ou celui à base 2, ne diffèrent de celle-ci que d'un facteur multiplicatif. Le rapport entre la fonction logarithme introduite par Neper et la primitive de $1/x$ était connu de Leibniz. Pour plus de détails, voir [**Bou76**, III.40]. Dans cette partie, nous allons en fait utiliser cette idée comme définition du logarithme.

John Napier
(Neper)

L'exponentielle est la fonction réciproque du logarithme. C'est un cas particulier de fonction puissance, et toutes les autres fonctions puissances se construisent facilement à l'aide de l'exponentielle. La notation e pour $\exp(1)$ (dont il découle que $e^x = \exp(x)$ pour tout x) est due à Leonhard Euler (1707-1783), qui avait le génie des notations, et qui s'est intéressé de près à cette fonction.

La fonction $x \mapsto 1/x$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, elle est intégrable sur tout intervalle inclus dedans. On peut donc poser la définition suivante.

4.18. Définition. On considère la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\int_1^x (1/t)\, dt$. On appelle cette fonction logarithme népérien et on la note ln.

4.19. Proposition. *La fonction* ln *est continue, dérivable, et sa dérivée est* $x \mapsto 1/x$.

Démonstration. Cela découle du théorème fondamental de l'analyse 3.33. □

4.20. Proposition. *La fonction* ln *vaut* 0 *en* 1*, et vérifie* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*, en particulier* $\ln(1/x) = -\ln(x)$.

Démonstration. La valeur $\ln(1) = 0$ se lit sur les bornes de l'intégrale définissant ln. La formule se montre par la relation de Chasle et par changement de variable 3.38 en posant $u = t/x$:

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{u} du = \ln(x) + \ln(y).$$

□

En particulier, on a $\ln(n!) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$.

4.21. Exercice. En fait, toute fonction dérivable qui transforme les produits en sommes est proportionnelle à la fonction logarithme : soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$, qui vérifie $f(xy) = f(x) + f(y)$. Montrer que $f'(x) = a/x$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Affaiblissons l'hypothèse sur f en ne la supposant pas dérivable. Montrer qu'elle vérifie $f(1) = 0$ et que si elle est continue en 1, elle est continue partout. Montrer de même que si elle est dérivable en 1, elle est dérivable partout.

4.22. Proposition. *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Elle tend vers* $-\infty$ *en* 0, *vaut* 0 *en* 1 *et tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$. *Elle est strictement concave sur tout intervalle inclus dans* $\mathbb{R}_+^*$, *c'est-à-dire que* $-\ln$ *est convexe.*

Démonstration. On a vu en 4.19 que la dérivée de ln était bien la fonction $x \mapsto 1/x$, qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par la proposition 1.9, la fonction ln est strictement croissante.

Comme ln est strictement croissante et vaut 0 en 1, pour toute valeur $a > 1$, par exemple $a = 2$, on a $\ln(a) > 0$. Du coup, par la formule $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, on montre immédiatement que $\ln(a^n) = n \ln(a)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Ceci, et la croissance de ln montre que sa limite en $+\infty$ est bien $+\infty$ (exercice : le vérifier formellement). De même, on montre qu'elle doit tendre vers $-\infty$ en 0 car $\ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$.

La dérivée seconde de ln est $x \mapsto -1/x^2$ et est donc strictement négative. Par le corollaire 1.52, la fonction ln est donc strictement concave. $\square$

4.23. Proposition. *Les primitives de la fonction* $\ln$ *sont les fonctions de la forme* $x \mapsto x\ln(x) - x$ *à une constante additive près.*

Démonstration. Cela a déjà été traité en exemple 3.36. $\square$

4.24. Proposition. *La fonction* $\ln$ *est infiniment dérivable sur tout* $]0, +\infty[$ *et sa dérivée* n*-ième* $(n > 0)$ *est*

$$x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Démonstration. Cela se montre par récurrence sur n et c'est laissé en exercice au lecteur. $\square$

4.25. Proposition. *La fonction* $x \mapsto \ln(1+x)$ *admet un développement limité à tout ordre* n, *donné par*

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \epsilon(x)x^n.$$

Démonstration. On applique la formule de Taylor-Young 2.10 et le résultat de la proposition précédente pour calculer les dérivées qui s'y trouvent. $\square$

Les propriétés classiques de la fonction ln ont toutes été retrouvées, et son graphe est représenté sur la figure 1.

On a vu que la fonction logarithme est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, son image est $\mathbb{R}$, puisque sa limite en 0 est $-\infty$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Par le théorème A.11 elle admet donc une fonction réciproque.

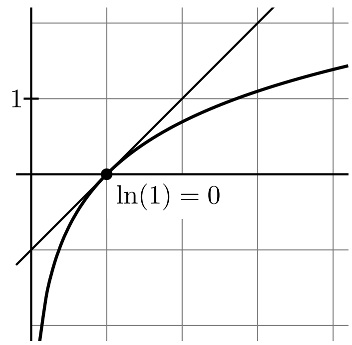


Figure 1. La fonction logarithme népérien et sa tangente en $x = 1$.

4.26. Définition. On appelle exponentielle la fonction $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ réciproque de la fonction logarithme et on la note exp.

4.27. Proposition. *La fonction* exp *est continue, dérivable, et sa dérivée est elle-même. Elle est donc infiniment dérivable. De plus, ses primitives sont égales à elle-même à une constante additive près.*

Démonstration. Puisque la dérivée de ln est la fonction inverse qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction exponentielle est continue et dérivable par le théorème A.13 et la proposition A.11. De plus on a la formule

$$(\exp)'(x) = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x)$$

toujours par cette même proposition. □

4.28. Proposition. *La fonction exponentielle vérifie* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *et* $\exp(0) = 1$.

Démonstration. Soient $u = \exp(x)$ et $v = \exp(y)$, et donc $x = \ln(u)$ et $y = \ln(v)$. On a ainsi

$$\exp(x+y) = \exp(\ln(u) + \ln(v)) = \exp(\ln(uv)) = uv = \exp(x)\exp(y)$$

par la propriété 4.20 du logarithme. On a également $\exp(0) = 1$ puisque $\ln(1) = 0$. □

4.29. Proposition. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *tend vers* 0 *en* $-\infty$ *et vers* $+\infty$ *en* $+\infty$. *Elle est strictement convexe.*

Démonstration. La croissance stricte et les limites peuvent se déduire du fait que c'est la fonction réciproque du logarithme, ou bien de la forme de la dérivée et d'un raisonnement analogue à celui de la preuve de 4.22. La stricte convexité provient du fait que la dérivée seconde de exp est elle-même et qu'elle est strictement positive. □

4.30. Proposition. *La fonction exponentielle admet un développement limité en* 0 *à tout ordre* n, *donné par*

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \epsilon(x)x^n.$$

DÉMONSTRATION. On applique la formule de Taylor-Young 2.10, sachant par 4.27 et 4.28 que toutes les dérivées successives en 0 valent 1. □

Encore une fois, nous avons retrouvé toutes les propriétés espérées de l'exponentielle. Son graphe est le symétrique du graphe de la fonction logarithme par rapport à la droite $y = x$, et se trouve en figure 2.

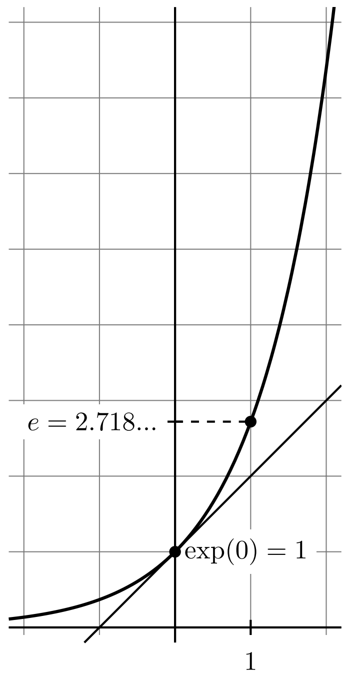


FIGURE 2. La fonction exponentielle et sa tangente en $x = 0$.

Il existe une dernière propriété très classique de l'exponentielle, qui consiste à dire qu'elle est somme de sa série de Taylor. C'est le contenu de l'exercice 1.63. Cela peut servir de définition alternative de l'exponentielle, et c'est particulièrement utile pour définir l'exponentielle d'un nombre complexe, mais cela sort du cadre de ce texte.

4.3. Fonctions puissances

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout le monde sait définir x^n pour un réel x en multipliant n copies de x. Et bien sûr, on a alors les formules $x^{m+n} = x^m x^n$ et $(xy)^n = x^n y^n$. Le but de ce qui suit est de définir une fonctions d'élévation à la puissance α lorsque α n'est plus un entier, de manière à ce que les formules ci-dessus soient toujours vérifiées. Une fois l'exponentielle définie, ça ne présente aucune difficulté.

4.31. DÉFINITION. Soit α un réel. On définit la fonction *puissance* α sur $\mathbb{R}_+^*$ comme $x \mapsto \exp(\alpha \ln(x))$. Elle arrive donc dans $\mathbb{R}_+^*$. On utilise bien sûr la notation x^α.

Avec cette nouvelle définition, si on pose $e = \exp(1)$ et donc $\ln(e) = 1$, on a alors $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est la raison pour laquelle on se permet parfois cette notation puissance pour la fonction exponentielle.

4.32. Proposition. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad \text{et} \qquad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

Démonstration. C'est immédiat à partir des propriétés 4.20 et 4.28 du logarithme et de l'exponentielle. □

4.33. Corollaire. *Lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, la fonction puissance définie en coïncide avec la multiplication de 1 par x effectuée α fois, c'est-à-dire la fonction puissance élémentaire.*

Démonstration. Il suffit de constater que $x^0 = \exp(0) = 1$ et $x^1 = \exp(\ln(x)) = x$. Puis on fait une récurrence sur $\alpha \in \mathbb{N}$ et on fait de même pour $-\alpha \in \mathbb{N}$. □

4.34. Proposition. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x) \qquad \text{et} \qquad \exp(x)^\alpha = \exp(\alpha x).$$

Démonstration. On part de la définition : $\ln(x^\alpha) = \ln(\exp(\alpha \ln(x))) = \alpha \ln(x)$. De même $\exp(x)^\alpha = \exp(\alpha \ln(\exp(x))) = \exp(\alpha x)$. □

4.35. Proposition. *Soit f La fonction puissance-α. Elle est dérivable sur tout $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est donnée par $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Elle est même infiniment dérivable, de dérivée n-ième donnée par la formule*

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Si

- $\alpha = 0$ *alors f est constante égale à 1 ;*
- $\alpha < 0$, *alors f est strictement décroissante et strictement convexe ;*
- $0 < \alpha < 1$, *alors f est strictement croissante et strictement concave ;*
- $\alpha = 1$ *alors f est l'identité, $f(x) = x$;*
- $1 < \alpha$ *alors f est strictement croissante et strictement convexe.*

Démonstration. C'est un exercice facile à partir de la dérivée et de la dérivée seconde, en employant 1.9 et 1.52. □

4.36. Proposition. *On considère la fonction $x \mapsto x^\alpha$. Si*
- $\alpha < 0$, *alors sa limite en 0 est $+\infty$ et sa limite en $+\infty$ est 0.*
- $\alpha > 0$, *alors sa limite en 0 est 0 et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.*

Démonstration. Ce sont des conséquences faciles de la définition, des limites correspondantes pour ln et exp et de la continuité de ces dernières. □

4.37. Lemme. *La limite quand x tend vers l'infini de $\ln(x)/x$ est 0.*

Démonstration. La fonction $f(x) = \ln(x)/x$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, et $f'(x) = (1 - \ln(x))/x^2$ est négative pour $x > e$. La fonction f est donc décroissante au-delà de $x = e$ et minorée par 0, elle admet donc une limite $l \geq 0$. Si $g(x) = \ln(x^2)/x^2$, par composition des limites, on doit donc avoir que $\lim_{+\infty} g = l$ aussi. Mais $g(x) = 2f(x)/x$, donc $l = 0$. □

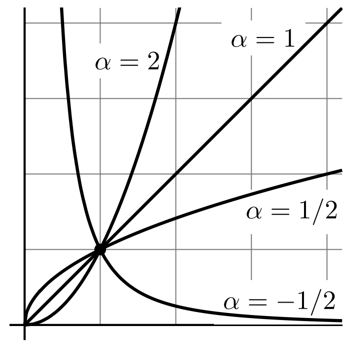


FIGURE 3. La fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ pour différentes valeurs de α

On obtient comme corollaires à ce lemme toutes les formes indéterminée de limites de quantités de la forme $x^\alpha \ln(x)$ ou $x^\alpha \exp(x)$, qu'on retient en disant : “l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme”, ce qui veut dire que lorsqu'on tombe sur une forme indéterminée de la forme ci-dessus, on ne regarde que la fonction qui l'emporte pour deviner la limite.

4.38. COROLLAIRE. *On a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & si\ \alpha > 0 \\ +\infty & si\ \alpha \leq 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = \begin{cases} 0 & si\ \alpha > 0 \\ -\infty & si\ \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

DÉMONSTRATION. Quand x tend vers $+\infty$, seul le cas $\alpha > 0$ est indéterminé. On le déduit du lemme en remarquant que $\ln(x)/x^\alpha = (1/\alpha)\ln(x^\alpha)/x^\alpha$. Or x^α tend alors vers $+\infty$ en $+\infty$, on applique donc la composition des limites. Les cas en 0 sont équivalents à ceux en $+\infty$ en posant $u = 1/x$. □

4.39. EXERCICE. Calculer les limites en 0 et $+\infty$ de $x^\alpha \ln(x^\beta)$ et celle de $x^\alpha \ln(x)^\beta$ selon les valeurs de α et β.

4.40. COROLLAIRE. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} (-x)^\alpha \exp(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION. La limite en $+\infty$ s'obtient soit par le même type de raisonnement que pour le lemme 4.37, soit par un changement de variable à partir de celles pour le logarithme, quand $\alpha > 0$.

La limite en $-\infty$ s'obtient à partir de celle en $+\infty$ en changeant x en $-x$. □

4.4. Fonctions trigonométriques

Nous arrivons maintenant à une question délicate que nous allons allègrement massacrer, faute de temps : la définition de la fonction sinus et de sa soeur la fonction cosinus. Il y a essentiellement deux approches possibles. L'une utilise la définition et les propriétés d'une fonction exponentielle sur les nombres complexes, qui n'a pas été définie parce que cela demande des connaissances sur les séries de nombres complexes. C'est probablement l'approche la plus facile, la plus rapide et la plus générale, en supposant ces connaissances acquises. Essentiellement, on utilise la série de Taylor comme dans l'exercice 1.63 en montrant qu'elle converge pour tout nombre complexe, puis on pose cela comme définition, et on remontre les propriétés. On définit ensuite le cosinus de x comme la partie réelle de $\exp(ix)$ et le sinus comme sa partie imaginaire. Elle permet même de définir des sinus et des cosinus de nombres complexes.

L'autre approche est plus élémentaire, et ne demande pas de connaissances sur les complexes. Elle pourrait être poursuivie ici, mais elle occuperait trop de temps dans ce cours, aussi nous n'allons pas la mener en détail non plus. Elle fonctionne approximativement comme ceci. On définit d'abord la fonction arccos comme la primitive de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ par une intégrale. Puis on montre qu'elle admet une fonction réciproque, qu'on appelle cos. Ensuite, on définit sin comme $\sqrt{1-\cos}$, puis on prolonge cos et sin à tout $\mathbb{R}$ de manière à les rendre périodiques. On définit finalement les fonctions arcsin, tan et arctan comme on l'imagine. On prouve alors toutes les propriétés voulues, une par une, et en particulier toute la fin de la table 1 (mais pas dans l'ordre). Pour les curieux, cette approche est entièrement déroulée dans [**Spi80**, Ch. 15].

Dans les deux approches, on obtient au passage une définition du nombre π. Dans la première, c'est le plus petit réel positif tel que $\exp(i\pi) = -1$, et dans la deuxième, c'est le nombre $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Bien entendu, on peut montrer que les deux approches donnent les mêmes fonctions et le même nombre π.

Les propriétés qu'on obtient, en plus de celles de la table 1, sont les formules de trigonométrie usuelles qu'on apprend au lycée, comme par exemple $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Passons donc en revue sans démonstration les principales propriétés des fonctions trigonométriques et de leurs fonctions réciproques.

4.41. Proposition. *La fonction sinus, notée* sin*, est définie sur* $\mathbb{R}$*. De plus*
- *elle est périodique, de période* 2π *et impaire ;*
- *son image est* $[0,1]$ *;*
- *elle est dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* cos*.*

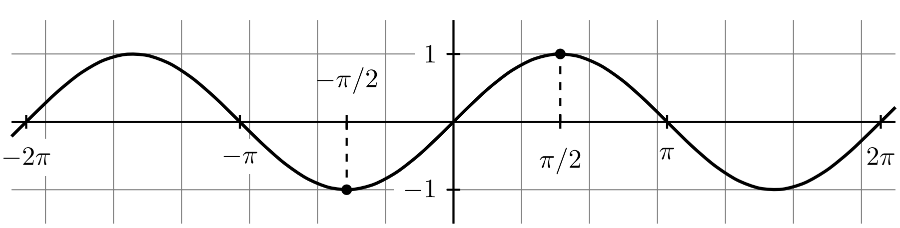


Figure 4. La fonction sinus

Remarquons peut-être simplement que la forme dite indéterminée classique $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$ est la dérivée en 0 de la fonction sinus, donc donnée par $\cos(0) = 1$.

4.42. PROPOSITION. *La fonction cosinus, notée* $\cos$*, est définie sur* $\mathbb{R}$*. De plus,*
- *elle est périodique, de période* 2π*, et paire ;*
- *son image est* $[0, 1]$ *;*
- *elle est dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* $-\sin$*.*

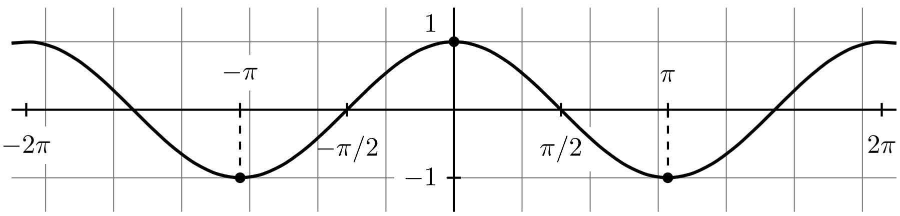


FIGURE 5. La fonction cosinus

4.43. PROPOSITION. *On a les formules suivantes, reliant le sinus et le cosinus.*
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$*.*
- *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$*, on a* $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$*.*
- *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$*, on a* $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$*.*

4.44. DÉFINITION (tangente). La fonction tangente, notée tan, est définie sur tout intervalle de la forme $[-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$ par la formule $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$.

4.45. PROPOSITION. *La fonction tangente a les propriétés suivantes :*
- *elle est périodique, de période* π *;*
- *elle est dérivable (donc continue), de dérivée* $x \mapsto 1/\cos^2(x) = 1 + \tan^2(x)$ *;*
- *sur chaque intervalle* $[-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$*, elle est strictement croissante ;*
- *on a* $\lim_{(\pi/2)^-} \tan = +\infty$ *et* $\lim_{(-\pi/2)^+} \tan = -\infty$*.*

4.46. PROPOSITION. *La fonction tangente vérifie l'égalité*

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

pour tous a, b *tels que toutes les tangentes de la formule sont définies.*

4.47. PROPOSITION. *La fonction arc sinus, notée* $\arcsin$*, est la réciproque de la fonction* $\sin$*, définie sur l'intervalle* $[-1, 1]$*. Elle a les propriétés suivantes :*
- *son image est* $[-\pi/2, \pi/2]$ *;*
- *elle est continue sur* $[-1, 1]$ *et dérivable sur* $]-1, 1[$ *et sa dérivée est* $x \mapsto 1/\sqrt{1 - x^2}$ *;*
- *elle est strictement croissante sur* $[-1, 1]$*.*

4.48. PROPOSITION. *La fonction* $x \mapsto x\arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$ *est une primitive de la fonction* $\arcsin$*.*

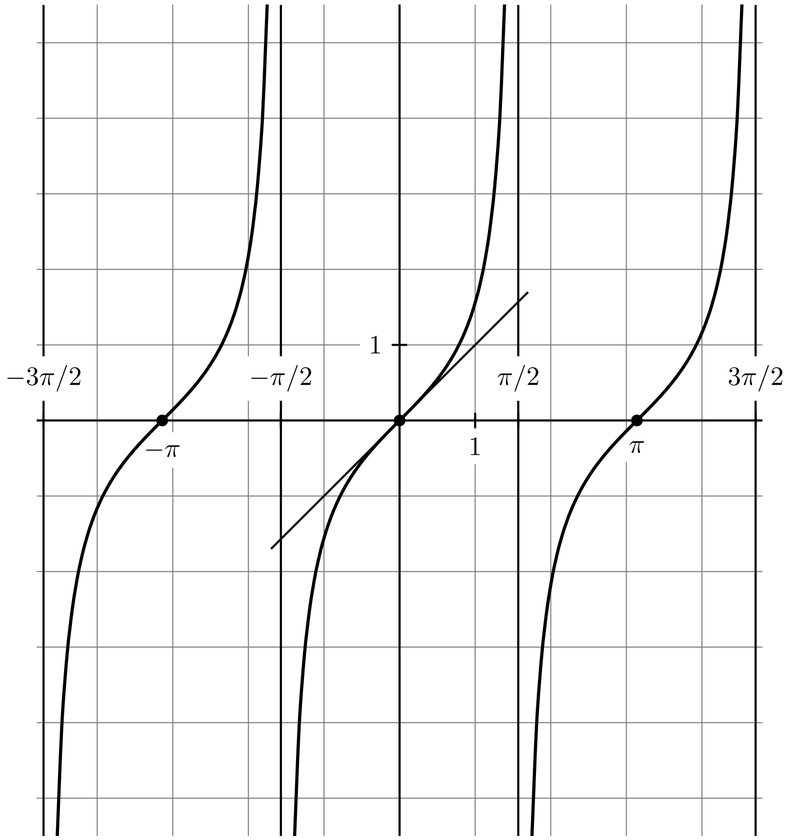


FIGURE 6. La fonction tangente sur trois périodes, avec sa droite tangente en 0

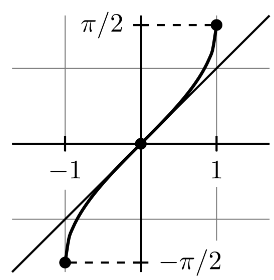


FIGURE 7. La fonction arc sinus et sa tangente en 0

DÉMONSTRATION. Par intégration par parties, en posant $u(x) = \arcsin(x)$ et $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$. Il faut alors déterminer la primitive de $x/\sqrt{1-x^2}$ qui est $-\sqrt{1-x^2}$. □

4.49. PROPOSITION. *La fonction arc cosinus, notée* arccos*, est la réciproque de la fonction* sin*, définie sur l'intervalle* $[-1,1]$*. Elle a les propriétés suivantes :*
– *son image est* $[0,\pi]$ *;*

– *elle est continue sur* $[-1,1]$ *et dérivable sur* $]-1,1[$ *et sa dérivée est* $x \mapsto -1/\sqrt{1-x^2}$ *;*
– *elle est strictement décroissante sur* $[-1,1]$.

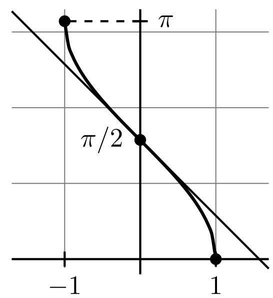


FIGURE 8. La fonction arc cosinus et sa tangente en 0

4.50. PROPOSITION. *La fonction* $x \mapsto x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$ *est une primitive de la fonction* arccos.

DÉMONSTRATION. Par intégration par parties, de même que pour arcsin. □

4.51. PROPOSITION. *Les fonctions* arcsin *et* arccos *sont reliées par l'égalité*

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2 \qquad \textit{pour tout } x \in [-1,1].$$

4.52. PROPOSITION. *La fonction arc tangente, notée* arctan*, est définie sur* $\mathbb{R}$ *et est la fonction réciproque de* tan. *Elle vérifie les propriétés suivantes :*
– *elle est dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* $x \mapsto 1/(1+x^2)$ *;*
– *elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *;*
– *on a* $\lim_{+\infty} \arctan = \pi/2$ *et* $\lim_{-\infty} \arctan = -\pi/2$.

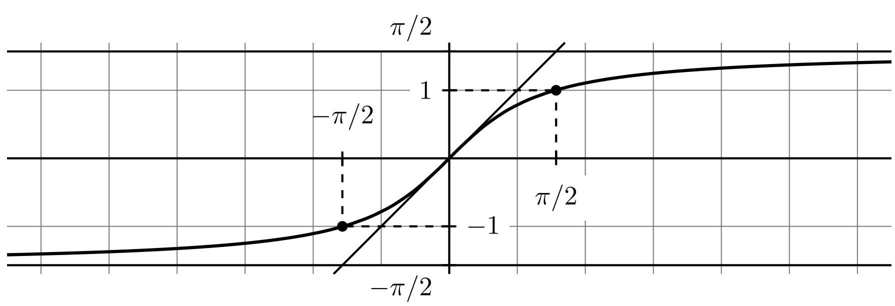


FIGURE 9. La fonction arc tangente, sa tangente en 0 et ses asymptotes

4.53. PROPOSITION. *La fonction* arctan *vérifie pour tout* $x > 0$

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$$

et pour tout $x < 0$

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\pi/2.$$

DÉMONSTRATION. On montre que la dérivée du membre de gauche vaut 0 et donc que la fonction est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis on calcule la constante en $x = 1$ et $x = -1$. $\square$

4.54. PROPOSITION. *Sur les domaines de définitions respectifs de* arcsin*,* arccos *et* arctan*, on a les égalités suivantes :*
- $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$;
- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$;
- $\sin(\arctan(x)) = x/\sqrt{1 + x^2}$;
- $\tan(\arcsin(x)) = x/\sqrt{1 - x^2}$;
- $\tan(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}/x$;
- $\cos(\arctan(x)) = 1/\sqrt{1 + x^2}$.

4.55. PROPOSITION. *La fonction* $x \mapsto x \arctan(x) - \ln(1 + x^2)/2$ *est une primitive de la fonction* arctan*.*

DÉMONSTRATION. Par intégration par parties, de même que pour arcsin, mais cette fois-ci, il faut trouver une primitive de $x \mapsto x/(1 + x^2)$ qui est donnée par $\ln(1 + x^2)/2$. $\square$

CHAPITRE 5

Équations différentielles

Une équation différentielle relie une fonction et ses dérivées successives. Par exemple :

$$(3x+2)f'(x)+5x^2f(x)=\ln(x) \tag{5.1}$$

$$f'(x)=f(x)^2 \tag{5.2}$$

$$f''(x)+f'(x)+f(x)=0 \tag{5.3}$$

Dans les équations qui précèdent, l'inconnue est la fonction f ; la question est en général de trouver toutes les fonctions f qui satisfont à une, voire plusieurs, équations différentielles données.

De telles équations apparaissent fréquemment en physique dans différents contextes, dont le plus célèbre est la mécanique newtonienne, où les équations relient des forces à des accélérations. Or l'accélération d'un point n'est autre que la dérivée seconde de la fonction qui donne la position de ce point en fonction du temps. Voici l'équation qui décrit la chute libre verticale d'un corps dans le vide, sous l'action d'une force constante, ici la gravité.

$$-mg=mz''(t) \tag{5.4}$$

Les paramètres m et g sont constants et représentent respectivement la masse du corps et la gravitation. Le terme de gauche, $-mg$, représente la force (exercée vers le bas, d'où le signe moins). L'altitude du corps est la fonction z, qui évolue au cours du temps, et c'est elle qu'on veut connaître. Passer de l'équation (5.4) à une forme explicite de z comme

$$z(t)=-\frac{g}{2}t^2+v_0z+z_0 \tag{5.5}$$

(où z_0 est l'altitude de départ et v_0 la vitesse de départ) est ce qu'on appelle résoudre l'équation différentielle.

Remarquons que l'équation différentielle (5.4) ne suffit pas à déterminer totalement la fonction z, puisque toute fonction de la forme (5.5) est solution, pour n'importe quelle valeur de v_0 ou de z_0. Autrement dit, étant donné l'équation (5.4), il y un ensemble de fonctions qui sont solutions. Cet ensemble de solutions peut parfois être vide, ou au contraire contenir une infinité de fonctions, comme dans l'exemple ci-dessus.

Le calcul intégral permet de montrer à peu de frais l'existence de solutions à certaines équations différentielles. Dans ces notes, on se contentera du cas le plus simple.

5.1. Premier ordre

5.1. Définition. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$a(t)f'(t) + b(t)f(t) = 0 \tag{5.6}$$

où a et b sont des fonctions d'un intervalle ouvert non vide I dans $\mathbb{R}$.

Résoudre cette équation est donc trouver une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui la vérifie pour tout $t \in I$, et qui est donc en particulier dérivable sur I, sinon ça n'a pas de sens. C'est facile, à condition que les fonctions a et b soient continues, et que a ne s'annule pas sur I. Commençons par chercher une fonction f qui est strictement positive sur I. On écrit alors :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{b(t)}{a(t)}.$$

Or le terme de gauche est la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(f(t))$. Soit F une primitive du terme de droite (notons qu'il en admet, de la forme $-\int_{t_0}^{t} \frac{b(u)}{a(u)}\, du$ où t_0 est un point de I, par le théorème fondamental de l'analyse 3.33). Sur un intervalle (pas sur n'importe quel domaine !), deux primitives diffèrent d'une constante (théorème 1.12), ce qui donne immédiatement

$$\ln(f(t)) = k + F(t)$$

pour une certaine constante $k \in \mathbb{R}$. autrement dit, en appliquant la fonction exponentielle,

$$f(t) = K \exp\left(F(t)\right) \tag{5.7}$$

où $K > 0$ est une constante (égale à $\exp(k)$). Notons que cette fonction est bien strictement positive. On a donc obtenu jusqu'ici que si a ne s'annule pas sur I, alors toute fonction strictement positive f solution de (5.6) est de la forme (5.7). Essayons maintenant de nous affranchir de la condition de positivité sur f. Considérons la solution avec $K = 1$, c'est-à-dire $f_1(t) = \exp\left(F(t)\right)$. Supposons que f soit une solution de l'équation différentielle (5.6) et formons le quotient $h(t) = f(t)/f_1(t)$, bien défini puisque $f_1(t)$ ne s'annule pas. On calcule alors

$$h'(t) = \frac{f'(t)f_1(t) - f(t)f_1'(t)}{f_1(t)^2} = \frac{b(t)}{a(t)}\frac{f(t)f_1(t) - f(t)f_1(t)}{f_1(t)^2} = 0$$

où l'équation (5.6) est utilisée pour remplacer f' et f_1' à la deuxième égalité. On trouve donc que h est constante sur I, puisque sa dérivée est nulle (corollaire 1.10). Autrement dit, on a $f(t)/f_1(t) = h(t) = K \in \mathbb{R}$, donc la fonction f est de la forme (5.7), mais cette fois-ci avec $K \in \mathbb{R}$ une constante quelconque, pas nécessairement positive. Résumons cela en un théorème.

5.2. Théorème. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Si $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues*[1] *et que a ne s'annule pas sur I, alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (5.6) *est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$f(t) = K \exp\left(F(t)\right)$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et F est une primitive de la fonction $t \mapsto -b(t)/a(t)$.

1. La continuité n'est en fait pas l'hypothèse optimale. La seule chose utilisée est que la fonction b/a doit admettre une primitive.

5.3. Exemple. Cherchons les solutions sur $I =]-2, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(t+2)f'(t) + 3tf(t) = 0. \tag{5.8}$$

La fonction $t \mapsto t+2$ ne s'annule pas sur I, donc le théorème 5.2 s'applique. Une primitive de $-3t/(t+2) = 3(1-2/(t+2))$ est donnée par $t \mapsto -3t + 6\ln(t+2)$ dont l'exponentielle est $(t+2)^6 \exp(-3t)$. L'ensemble des solutions de l'équation (5.8) est donc l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto K(t+2)^6 \exp(-3t)$ avec $K \in \mathbb{R}$.

5.4. Exemple. On considère l'équation différentielle $f'(t) = f(t)$, sur un intervalle I non vide (ex : $I = \mathbb{R}$). Alors les fonctions f solutions sont de la forme $f(t) = K \exp\left(\int_0^t 1\right)$, autrement dit de la forme $K\exp(t)$. On a donc montré que si une fonction est égale à sa dérivée, alors elle est égale à la fonction exponentielle, à une constante multiplicative près.

Compliquons maintenant l'équation (5.6) en lui rajoutant un second membre.

5.5. Définition. On appelle équation différentielle du premier ordre avec second membre une équation de la forme

$$a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t) \tag{5.9}$$

où a, b et c sont des fonctions d'un intervalle ouvert non vide I dans $\mathbb{R}$.

Remarquons tout d'abord le point suivant. Supposons que l'on dispose de deux solutions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de l'équation (5.9). Alors $g(t) = f_2(t) - f_1(t)$ est solution de l'équation (5.6), dite “sans second membre”. On obtient donc que si f_1 est une solution de l'équation (5.9), dite “avec second membre”, alors l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme $f(t) = f_1(t) + g(t)$ où $g(t)$ est une solution de l'équation sans second membre (5.6) (que l'on sait déterminer !). Pour trouver l'ensemble des solutions de (5.9), il suffit donc d'en trouver une seule (notée f_1) et de trouver l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée (5.6) en appliquant le théorème 5.2.

En pratique, il faut donc être capable de trouver une solution de l'équation avec second membre, et le tour est joué. On emploie pour cela la méthode dite de *variation de la constante*. Elle porte ce nom parce qu'on cherche une solution de l'équation avec second membre (5.9) de la forme $f_1 = \lambda g_1$ où g_1 est une solution (celle qu'on veut), de l'équation sans second membre (5.6) et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est une *fonction* dérivable : c'est la “constante” qu'on fait “varier”, ce qui est une manière un peu bizarre de dire les choses, mais il ne faut pas s'inquiéter pour si peu. On dérive f_1 et on remplace dans (5.9), pour trouver

$$af_1' + bf_1 = a\big(\lambda' g_1 + \lambda g_1'\big) + b\lambda g_1 = a\lambda' g_1 = c$$

où on a utilisé que g_1 est solution de l'équation sans second membre pour la deuxième égalité. On obtient alors immédiatement que $\lambda' = \frac{c}{ag_1}$ et donc que λ en est une primitive que l'on détermine explicitement si possible. Résumons donc cela en un théorème.

5.6. Théorème. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions continues et que a ne s'annule pas sur I, alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (5.9) *est l'ensemble des fonctions de la forme $f(t) = f_1(t) + K\exp(F(t))$ où $K \in \mathbb{R}$ et f_1 est une solution (fixée, mais celle qu'on veut) de* (5.9). *Une telle solution f_1 existe toujours et est de la forme $f_1 = g_1 \int \frac{c}{ag_1}$ où*

$\int \frac{c}{ag_2}$ *désigne une primitive de* $\frac{c}{ag_1}$ *du et* g_1 *est une solution donnée de l'équation sans second membre* (5.6).

Suivons un exemple.

5.7. Exemple. Cherchons les solutions sur $]-2,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(t+2)f'(t) + 3tf(t) = (t+2)^7. \tag{5.10}$$

On commence par résoudre l'équation “sans second membre”, ce qui est fait dans l'exemple 5.3. On en choisit alors une solution, par exemple $g_1(t) = (t+2)^6 \exp(-3t)$, et on cherche une primitive de $\frac{c}{ag_1}$, qui est $t \mapsto \frac{(t+2)^7}{(t+2)^7 \exp(-3t)} = \exp(3t)$. La fonction f_1 recherchée est donc donnée par $f_1(t) = (t+2)^6 \exp(-3t)\frac{1}{3}\exp(3t) = \frac{1}{3}(t+2)^6$. On trouve donc que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (5.10) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{1}{3}(t+2)^6\big(1 + K\exp(-3t)\big) \qquad \text{où } K \in \mathbb{R}.$$

5.2. Conditions initiales

La constante K qui apparaît dans les solutions peut bien sûr être déterminée lorsqu'en plus d'avoir l'équation différentielle, on impose une valeur de la solution en un point donné.

5.8. Exemple. Cherchons les fonctions solutions de l'équation différentielle (5.10) et qui valent 0 en 0. Cela impose immédiatement, en remplaçant dans la solution, que $\frac{2^6}{3}(1+K) = 0$, donc $K = -1$. On ne trouve donc qu'une fonction solution de (5.10) qui vaut 0 en 0 et il s'agit de la fonction $t \mapsto \frac{1}{3}(t+2)^6\big(1 - \exp(-3t)\big)$.

On dit qu'on a fixé une “condition initiale”, par analogie avec la physique, où on connaît souvent la valeur de la fonction au début de l'expérience, donc à un temps t donné (dans l'exemple $t = 0$).

5.3. Raccordement

Il peut arriver que la fonction a de l'équation différentielle (5.9) s'annule sur l'intervalle I. Il n'existe alors pas vraiment de méthode générale pour conclure, mais on peut tenter de résoudre l'équation sur des intervalles plus petits où a ne s'annule pas, puis “raccorder” les solutions trouvées de manière à obtenir une fonction dérivable.

5.9. Exemple. Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$ (et non plus sur $]-2,+\infty[$) de l'équation différentielle

$$(t+2)f'(t) + 3tf(t) = (t+2)^7.$$

Par l'exercice 5.7, on sait déjà qu'une solution sur $]-2,+\infty[$ est de la forme

$$t \mapsto \frac{1}{3}(t+2)^6\big(1 + K\exp(-3t)\big) \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

Par la même méthode, on obtient qu'une solution sur $]-\infty,-2[$ est de la même forme

$$t \mapsto \frac{1}{3}(t+2)^6\big(1 + \tilde{K}\exp(-3t)\big) \qquad \text{avec } \tilde{K} \in \mathbb{R}.$$

Une solution sur $\mathbb{R}$, lorsqu'on la restreint à $]-\infty,-2[$ (resp. à $]-2,+\infty[$), doit donc être de la forme ci-dessus. De plus, pour que l'équation différentielle ait un sens, on veut que la solution soit dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier en -2. Cela impose donc que les deux formes soient prolongeables par continuité en -2, ce qui est évident : elles se prolongent par 0 (indépendamment de la valeur de K ou $\tilde{K}$). En étudiant le taux de variation à gauche et à droite en 0, on trouve alors que sa limite est également 0 à gauche et à droite, toujours indépendamment des valeurs de K et $\tilde{K}$. On obtient alors les fonctions solutions sont de la forme

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3}(t+2)^6\big(1+\tilde{K}\exp(-3t)\big) & \text{si } t<-2 \\ 0 & \text{si } t=-2 \\ \frac{1}{3}(t+2)^6\big(1+K\exp(-3t)\big) & \text{si } t>-2 \end{cases}$$

avec $K, \tilde{K} \in \mathbb{R}$ (non nécessairement égales).

CHAPITRE 6

Courbes paramétrées

Lorsqu'on décrit une la trajectoire d'un objet, dans un plan pour commencer, la situation est la suivante : la position de l'objet au temps t (un réel) est donnée par une paire de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$, appelées *coordonnées cartésiennes*. Les coordonnées x et y du point sont donc des fonctions de t. On considère alors l'ensemble des points $\big(x(t), y(t)\big)$. Cela forme un dessin sur le plan $\mathbb{R}^2$ qu'on appelle le support géométrique de la courbe paramétrée. Attention, il y a de nombreuses manières de paramétrer le même support géométrique. Parfois, il est plus simple de spécifier un point en précisant au temps t à quel angle $\theta(t)$ il se trouve par rapport à l'axe des abscisses du repère, et à quelle distance de l'origine $\rho(t)$. On parle alors de coordonnées polaires. Il faut savoir passer de l'une à l'autre représentation pour éventuellement simplifier les calculs. Bien entendu, le paramètre t peut représenter autre chose que le temps, qui n'est qu'un exemple classique.

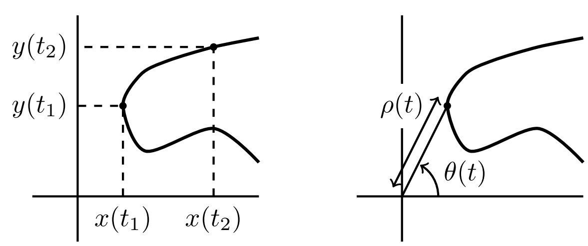


FIGURE 1. Courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes, puis polaires

Dans tout ce chapitre, I désignera une union finie d'intervalles (ouverts ou fermés). On supposera toujours donné le repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ d'origine $o = (0, 0)$ et tel que le produit scalaire de vecteurs est donné par $(a, b).(c, d) = (ac+bd)$. En particulier, la norme du vecteur (a, b) est $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

6.1. Coordonnées cartésiennes

6.1. DÉFINITION. On appelle *courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes* la donnée de deux fonctions *continues* $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$. L'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ de la forme $p_t = (x(t), y(t))$ avec $t \in I$ est appelé le *support* de la courbe.

L'adjectif "cartésiennes" provient du nom de famille de René Descartes (1596-1650), qui a contribué à systématiser l'emploi de coordonnées pour désigner un point du plan, et pour décrire la géométrie en termes de calculs analytiques, comme expliqué dans *La Géométrie*, un des appendices au *Discours de la méthode*, publié en 1637.

⚠ On ne s'intéresse donc ici qu'à des courbes *continues* sur leur domaine de définition. Il est bien sûr possible de regarder une situation plus générale, mais ce n'est pas notre objet ici. Dans tout ce qui suit, la continuité des fonctions x et y est donc supposée.

6.2. Remarque. Comme d'habitude, lors d'une première lecture, penser à $I = \mathbb{R}$, mais il y a un certain nombre d'exemples intéressants pour lesquels I n'est pas $\mathbb{R}$, comme par exemple l'hyperbole $x(t) = t$ et $y(t) = 1/t$, pour laquelle $I = \mathbb{R}^*$.

Le support représente donc le dessin dans le plan qu'on obtient en considérant toutes les valeurs de t, mais il y a bien sûr plusieurs manières de parcourir le même support. En voici un exemple très simple : la courbe $x(t) = t$ et $y(t) = 0$ a pour support l'axe des abscisses, ainsi que la courbe $x(t) = t^3$ et $y(t) = 0$.

6.3. Remarque. Remarquons que le graphe d'une fonction continue $t \mapsto f(t)$ est toujours le support d'une courbe paramétrée, et qu'il y a une manière particulièrement naturelle de paramétrer ce support en posant $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$. Par contre, il y beaucoup de courbes paramétrées dont le support ne peut pas être le graphe d'une fonction, car l'équation $x(t) = x_0$ peut admettre deux (ou plus) solutions t_1 et t_2 pour lesquelles $y(t_1) \neq y(t_2)$. Par exemple, $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$, voir la figure 2.

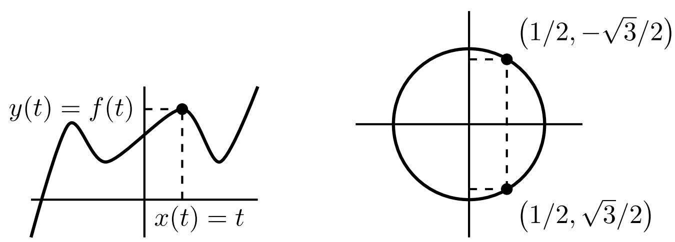


Figure 2. À gauche, le graphe d'une fonction $f(t)$ paramétré de la manière canonique ; à droite, la courbe $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$ qui ne peut pas être le graphe d'une fonction.

6.4. Définition (points simples, multiples). Soit p un point du plan. S'il existe exactement une valeur de t pour laquelle $p_t = p$, on dit que p est un point *simple*. S'il existe plusieurs valeurs de t pour lesquelles $p_t = p$, on dit que p est un point *multiple*. Lorsqu'il y a exactement deux valeurs, on parle de point *double*, pour trois valeurs, on parle de point *triple*, etc.

6.2. Coordonnées polaires

Il existe une autre manière classique de décrire les courbes du plan, qui revient à donner un point p par sa distance ρ au centre du repère o et par l'angle θ que forme le vecteur $\overrightarrow{op}$ avec l'axe des abscisses. On appelle cela les coordonnées polaires.

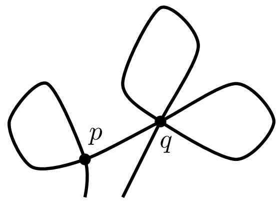


FIGURE 3. Le point p est double, le point q est triple, et les autres points sont des points simples.

6.5. DÉFINITION. Une courbe paramétrée en *coordonnées polaires* est la donnée de deux fonctions continues $\theta : I \to \mathbb{R}$ et $\rho : I \to [0, +\infty]$. Le point du plan p_t est donné par ses coordonnées (cartésiennes) $x(t) = \rho(t) \cos\theta(t)$ et $y(t) = \rho(t) \sin\theta(t)$.

Il est toujours possible de passer des fonctions ρ et θ qui donnent une courbe en coordonnées polaires aux fonctions x et y qui donnent la courbe en coordonnées cartésiennes, par définition. Par contre, pour faire le contraire, on peut toujours retrouver $\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ mais pour θ, il y a deux sortes d'ambiguïtés : premièrement, θ et $\theta + 2\pi$ donnent le même point, et deuxièmement, lorsque $\rho(t) = 0$, il n'est pas clair comment choisir la fonction $\theta(t)$.

La raison de l'introduction des coordonnées polaires est qu'elles permettent souvent d'avoir des expressions simples lorsque la courbe qu'on veut décrire "tourne" autour de l'origine du repère.

Il arrive fréquemment que la fonction θ soit simplement l'identité $\theta(t) = t$. Dans ce cas, on se contente d'appeler le paramètre directement θ et ρ est donc une fonction de θ. Par exemple, la spirale logarithmique tracée sur la figure 4 se décrit bien en coordonnées polaires. Elle a été étudiée par plusieurs mathématiciens parmi lesquels Descartes (1596-1650), Evangelista Torricelli (1608-1647), Jacques Bernouilli (1654-1705), Varignon (1654-1722). Elle apparaît dans plusieurs phénomènes naturels, comme la forme d'une coquille de nautile.

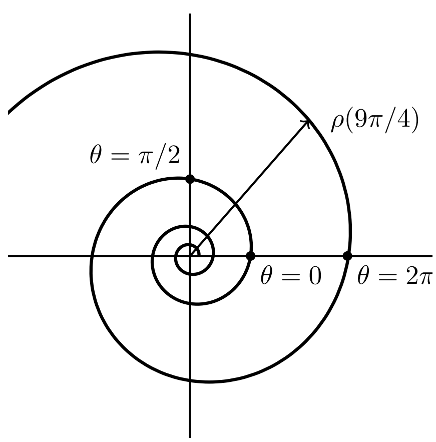


FIGURE 4. Spirale logarithmique d'équation polaire $\rho = \Phi^\theta$ où $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or

L'ellipse de la figure 5 est paramétrée de manière à ce qu'un de ses foyers soit au centre du repère. C'est une des figures de bases du mouvement de deux corps sous l'attraction gravitationnelle Newtonienne. Chacun des corps décrit une ellipse autour dont le centre de gravité du système est un foyer (voir n'importe quel ouvrage d'introduction à la mécanique). En particulier, un corps de masse négligeable (terre) par rapport à un autre (soleil) décrit une ellipse de foyer ce dernier. C'est une trajectoire périodique.

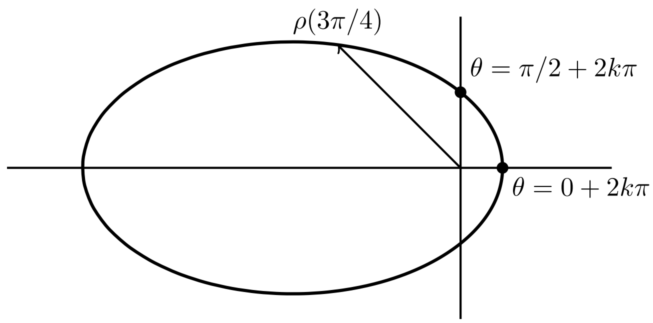


FIGURE 5. Ellipse d'équation polaire $\rho = 1/(1 + e\cos\theta)$ d'excentricité $e = 0.8$

6.3. Comportement local

Comme on l'a fait dans le chapitre sur les développements limités, on veut maintenant pouvoir regarder à quoi ressemble une courbe paramétrée au voisinage d'un de ses points. Il n'y a pas de surprise, on utilise justement les développements limités pour le faire. La première chose qu'on définit est la notion de droite tangente à une courbe paramétrée (6.9), puis on s'intéresse à la position d'une courbe par rapport à sa tangente au voisinage d'un point (proposition 6.20). Toutes ces notions donnent des informations sur la forme du support géométrique.

Dans toute cette partie, on considère que les courbes paramétrées pour lesquels le point p_t n'est pas constant sur un intervalle de longueur non nulle. Dans le cas contraire, on peut toujours faire l'étude en définissant une nouvelle courbe paramétrée en supprimant cet intervalle et en raccordant la courbe de départ.

Nous n'utiliserons dans ce qui suit que les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, qu'on coiffe d'une petite flèche. Un tel vecteur peut être désigné par ses deux coordonnées sur la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On écrira donc $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$, par exemple. On peut bien sur multiplier un vecteur par un scalaire : $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ et sommer deux vecteurs : $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Il est également possible d'ajouter à un point de $\mathbb{R}^2$ un vecteur $\overrightarrow{v}$ de manière à trouver un nouveau point de $\mathbb{R}^2$: $p_2 = p_1 + \overrightarrow{v}$. Enfin, étant donnés deux points p_1 et p_2 de $\mathbb{R}^2$, on peut former l'unique vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $p_1 + \overrightarrow{v} = p_2$, qu'on note $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{p_1p_2}$. Ces deux dernières opérations sont ce que l'on devine sur les coordonnées.

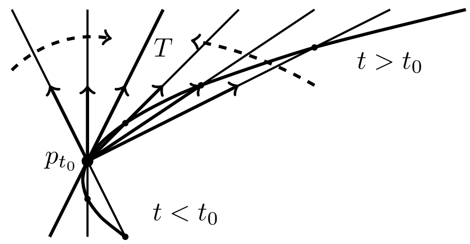


FIGURE 6. Le vecteur limite définit la tangente T en t_0. Voir l'exemple 6.10.

6.6. DÉFINITION. On définit la droite passant par un point $p = (x, y)$ et de direction portée par $\overrightarrow{u} \neq 0$ comme l'ensemble des points de la forme $p_\lambda = p + \lambda\overrightarrow{u}$.

6.7. LEMME. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (par exemple opposés), on obtient donc la même droite.*

DÉMONSTRATION. Laissée au lecteur. □

Pour une courbe paramétrée passant par un point p_{t_0}, on considère la droite $D(t_0, t)$ passant par p_{t_0} et un autre point p_t. On veut définir la tangente à une courbe paramétrée en t_0 comme la “droite limite” de $D(t_0, t)$ quand t tend vers t_0. On aurait envie de simplement regarder vers quoi tend le vecteur $\overrightarrow{p_{t_0}p_t}$ quand t tend vers t_0. Malheureusement, si la courbe est continue, ce vecteur va tendre vers le vecteur nul, et on ne peut pas se servir du vecteur nul pour définir un droite. Aussi, on se permet de multiplier $\overrightarrow{p_{t_0}p_t}$ par une fonction réelle $\lambda(t)$ définie sur autour de t_0 (mais pas nécessairement en t_0). Puis, on regarde la limite de $\lambda(t).(\overrightarrow{p_t p_{t_0}})$. Si cette limite est un vecteur $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, on a trouvé la direction de notre tangente. Le lemme 6.8 montre que si on change de fonction $\lambda(t)$, on tombe toujours sur un vecteur limite qui a même direction, donc cela ne change pas la droite tangente qu'on obtient, et cette tangente est ainsi vraiment définie correctement.

6.8. LEMME. *Soit $\delta > 0$ et soient λ et μ deux fonctions définies sur $]t_0 - \delta, t_0[\cup]t_0, t_0 + \delta[$. Supposons que*

$$\left(\lim_{t\to t_0} \lambda(t).(\overrightarrow{p_{t_0}p_t})\right) = \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \left(\lim_{t\to t_0} \mu(t).(\overrightarrow{p_{t_0}p_t})\right) = \overrightarrow{u} \neq 0,$$

alors les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

DÉMONSTRATION. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ étant non nul, il a au moins une coordonnée non nulle. Supposons que c'est son abscisse $v_x = \lim_{t\to t_0} \mu(t)\,(x(t) - x(t_0))$. Alors

$$\frac{u_x}{v_x} = \lim_{t\to t_0} \frac{\lambda(t)\,(x(t) - x(t_0))}{\mu(t)\,(x(t) - x(t_0))} = \lim_{t\to t_0} \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}$$

et donc

$$u_y = \lim_{t\to t_0} \lambda(t)\,(y(t) - y(t_0)) = \lim_{t\to t_0} \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}\mu(t)\,(y(t) - y(t_0)) = \frac{u_x}{v_x} v_y.$$

□

Écrivons donc sous forme de définition précise ce qu'on a déjà expliqué de manière informelle.

6.9. Définition (tangente). S'il existe $\delta > 0$ et une fonction $\lambda :]t_0 - \delta, t_0[\cup]t_0, t_0 + \delta[$ telle que $\lim_{t \to t_0} \lambda(t).(\overrightarrow{p_{t_0}p_t})$ est un vecteur $\overrightarrow{v} \neq 0$, on dit que la courbe admet une tangente en t_0 et que cette tangente est la droite passant par p_{t_0} et de direction portée par $\overrightarrow{v}$.

6.10. Exemple. Considérons la courbe paramétrée donnée par $x(t) = t(t+1/2)$ et $y(t) = t$. Son support géométrique est dessiné sur un repère orthonormé en figure 6. Montrons qu'il y a bien une tangente en $t_0 = 0$. On peut choisir la fonction $\lambda(t) = 1/t$. On a alors, sachant que $x(0) = y(0) = 0$,

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t)x(t) = 1/2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to t_0} \lambda(t)y(t) = 1.$$

On obtient donc pour tangente la droite portée par le vecteur $(1/2, 1)$ et passant par $(0, 0)$, c'est-à-dire la droite d'équation $y - 2x = 0$. Le vecteur $\lambda(t)\overrightarrow{p_{t_0}p_t}$ est représenté sur la figure 6 pour différentes valeurs de t.

6.11. Remarque. On peut en général prendre $\lambda(t) = \pm 1/\|\overrightarrow{p_{t_0}p_t}\|$, avec éventuellement un signe différent lorsqu'on s'approche de t_0 par valeurs inférieures ou supérieures, mais ça n'est pas forcément la fonction la plus agréable pour les calculs.

6.12. Définition (vecteur vitesse). Si les fonctions x et y sont dérivables en t, on appelle *vecteur vitesse* en t le vecteur $(x'(t), y'(t))$, et on le note $\overrightarrow{p}_t'$. Si les fonctions x et y sont deux fois dérivables en t, on appelle *vecteur accélération* en t le vecteur $(x''(t), y''(t))$ et on le note $\overrightarrow{p}_t''$.

Bien sûr, ce terme de vecteur vitesse provient de la physique, lorsque le paramètre t représente le temps, et sa norme est ce qu'on peut lire sur le compteur d'une voiture, et le vecteur accélération est celui qu'on ressent quand on accélère, freine ou tourne la voiture. Mais on se permettra d'utiliser ces termes pour n'importe quel paramètre t, même si ce paramètre n'a rien à voir avec le temps.

6.13. Définition (point régulier, point stationnaire). Si les fonctions x et y sont dérivables en t_0 et telles que le vecteur vitesse est non nul, on dit que la courbe est régulière en t_0, ou parfois, avec un petit abus de langage, que le point p_{t_0} est *régulier*. Si au contraire le vecteur vitesse est nul, on dira que la courbe est *stationnaire* en t_0.

C'est un abus de langage parce que par exemple en cas de point double $p = p_{t_0} = p_{t_1}$, la courbe peut être régulière en t_0 mais pas en t_1. Dans ce cas, il faut éviter de parler de la régularité au point p et préciser en t_0 ou en t_1.

En pratique, on utilise souvent la proposition suivante pour trouver la tangente.

6.14. Proposition. *Si la courbe a un point régulier en t_0, alors la tangente en t_0 est dirigée par $\overrightarrow{p}_{t_0}'$.*

Démonstration. C'est exactement le cas où $\lambda(t) = 1/(t-t_0)$, dans la définition 6.9. □

6.15. Exercice. Considérons la courbe paramétrée $x(t) = t^2 - 1$ et $y(t) = t(t^2 - 1)$. Montrer que la courbe admet une tangente en toute valeur de t et donner son équation en fonction de t. Montrer que $(0, 0)$ est le seul point multiple, qu'il est double, et calculer les deux tangentes obtenues pour les deux valeurs t_1 et t_2

correspondantes. Cet exercice montre bien qu'on ne peut pas vraiment parler de "la tangente en $(0,0)$", mais seulement de la tangente en t_1 et de celle en t_2. Bien que ce ne soit pas utile pour l'exercice, remarquons au passage que la courbe considérée admet pour équation cartésienne $y^2 - x^2(x+1) = 0$ et qu'on la nome *courbe nodale*, parce qu'elle ressemble un tout petit peu à un noeud. Elle est représentée en figure 7.

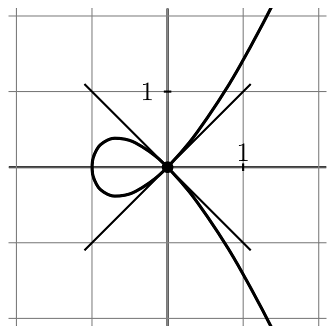


Figure 7. La courbe paramétrée d'équation $x(t) = t^2-1$ et $y(t) = t(t^2-1)$, d'équation cartésienne $y^2 - x^2(x+1)$. Le point $(0,0)$ est atteint en $t = -1$ et $t = 1$ et les tangentes respectives sont les droites d'équations $y = -x$ et $y = x$. Voir exercice 6.15.

6.16. Exemple. Examinons la courbe d'équations $x(t) = t$ et $y(t) = \sqrt{|t|}$ (donc le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$). En $t = 0$, le vecteur vitesse n'existe pas puisque y n'est pas dérivable en 0. Pourtant, la courbe admet une tangente verticale, qu'on trouve en considérant la fonction $\lambda(t) = 1/\sqrt{|t|}$. Cet exemple montre tout d'abord qu'on peut avoir une tangente sans que le vecteur vitesse soit défini. Il montre aussi que la courbe peut avoir une forme de pointe au point considéré. Enfin, c'est un exemple de courbe paramétrée qui est un graphe de fonction naturellement paramétré, comme expliqué dans la remarque 6.3, pour lequel la fonction n'est pas dérivable en un point, mais on considère tout de même qu'il y a une tangente à la courbe paramétrée.

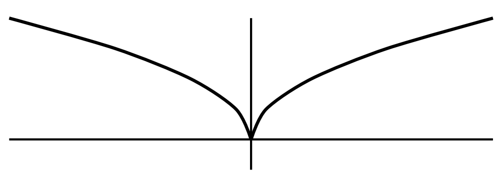


Figure 8. La courbe paramétrée $x(t) = t$, $y(t) = \sqrt{|t|}$ qui a une tangente verticale en $t = 0$.

6.17. Exercice. Considérons une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et paramétrons son graphe de manière usuelle, par $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$. Montrer que si f est dérivable en un point t_0, alors la courbe admet une tangente au sens de 6.9. Montrer que si f n'est pas dérivable en t_0 mais que le taux de variation $\Delta_f(t_0, t)$ admet une limite à gauche et une limite à droite, toutes deux infinies, alors la courbe admet tout de même une tangente au sens de 6.9.

Plus généralement, on effectue, si possible, un développement limité de la courbe au voisinage de t_0 : si les fonctions x et y admettent toutes deux des développements limités d'ordre n en t_0, on les regroupe sous forme vectorielle en

$$\overrightarrow{p_{t_0}p_t} = (t-t_0)\overrightarrow{u_1} + \cdots + (t-t_0)^n\ \overrightarrow{u_n} + (t-t_0)^n\ \overrightarrow{\epsilon_t} \tag{6.1}$$

où $\overrightarrow{\epsilon_t}$ est une fonction vectorielle qui tend vers $\overrightarrow{0}$ quand t tend vers t_0.

6.18. Proposition. *Supposons que les fonctions x et y admettent un développement limité d'ordre m en t_0 dont les i-èmes coefficients sont nuls pour $0 < i < m$, qu'on regroupe sous forme vectorielle*

$$\overrightarrow{p_{t_0}p_t} = (t-t_0)^m\ \overrightarrow{u_m} + (t-t_0)^m\ \overrightarrow{\epsilon_t}$$

Alors, si $\overrightarrow{u_m} \neq 0$, la tangente est dirigée par $\overrightarrow{u_m}$.

Démonstration. On utilise la fonction $\lambda(t) = (t-t_0)^{-m}$. □

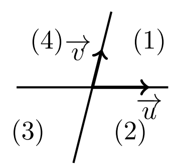
Par le théorème de Taylor-Young 2.10, c'est en particulier le cas si la fonction p_t est suffisamment dérivable.

6.19. Corollaire. *Si la courbe est m fois dérivable en t_0 et que m est le plus petit entier > 0 tel que $\overrightarrow{p}_{t_0}^{(m)} \neq 0$, alors la tangente est portée par $\overrightarrow{p}_{t_0}^{(m)}$.*

Intéressons-nous maintenant à la position de la courbe par rapport à sa tangente en un point. Le critère suivant fait lourdement appel aux développements limités, comme on peut s'y attendre pour un comportement au voisinage d'un point.

Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base du plan, découpons le plan autour d'un point P en quatre quadrants. Tout point peut s'écrire $p + s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ avec $s, t \in \mathbb{R}$. Par convention, on numérote dans ce texte les quadrants comme suit.

(1) si $s > 0$, $t > 0$;
(2) si $s > 0$, $t < 0$;
(3) si $s < 0$, $t < 0$;
(4) si $s < 0$, $t > 0$.



6.20. Proposition. *Supposons que les deux fonctions x et y admettent un développement limité d'ordre n écrit sous la forme (6.1) dont les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u}_{m-1}$ sont nuls, que $\overrightarrow{u}_m$ n'est pas nul et que n est le plus petit entier $> m$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_m$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}_n$ ne sont pas colinéaires. Par la proposition 6.18, on sait déjà que la tangente est portée par $\overrightarrow{u}$. On est alors dans l'une des quatre situations suivantes :*

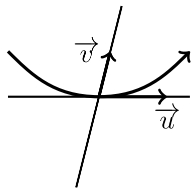
(i) Point ordinaire : m est impair et n est pair. La courbe passe du quadrant (4) au quadrant (1).

(ii) Point d'inflexion : m est impair et n est impair. La courbe passe du quadrant (4) au quadrant (2).

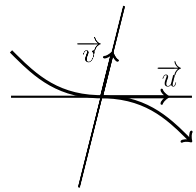
(iii) Point de rebroussement de première espèce : m est pair et n est impair. La courbe passe du quadrant 1 au quadrant 2.

(iv) Point de rebroussement de deuxième espèce : m est pair et n est pair. La courbe reste dans le quadrant 1.

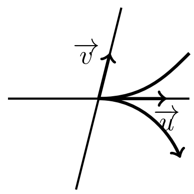
Démonstration. Il est clair que les quatre conditions sur m et n sont exclusives et couvrent tous les cas. Les seules affirmations à justifier concernent la position dans les quadrants, qui suivent immédiatement de la proposition 2.16, appliquée à la coordonnée de $\overrightarrow{p_{t_0}p_t}$ sur le vecteur $\overrightarrow{u}$, puis sur le vecteur $\overrightarrow{v}$. □



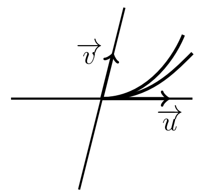
(i) point ordinaire



(ii) point d'inflexion



(iii) rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce



(iv) rebroussement de $2^{\text{ème}}$ espèce

Toujours par le théorème de Taylor-Young 2.10, on obtient immédiatement ce qu'on utilise le plus souvent en pratique :

6.21. Corollaire. *Soient m le plus petit entier > 0 tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p}_{t_0}^{(m)} \neq 0$ et n le plus petit entier $> m$ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{p}_{t_0}^{(n)}$ n'est pas colinéaire au précédent. Alors, les cas sont les mêmes que dans la proposition précédente.*

6.4. Branches infinies

Lorsque le paramètre tend vers une valeur t_0 qui n'est pas dans le domaine de définition de la courbe ou qui est éventuellement $\pm\infty$, il peut arriver que la norme $\|\overrightarrow{op_t}\|$ tende vers $+\infty$. On parle alors de branche infinie, et on veut connaître l'allure de la courbe pour une telle branche.

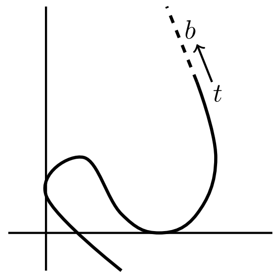
Rappelons qu'on s'intéresse à des courbes paramétrées continues sur leur domaine de définition I qui est une union finie d'intervalles $I_1, \ldots, I_n$ qu'on peut supposer disjoints et tels qu'aucune borne ouverte de l'un n'est dans un autre (sinon on regroupe $[a,b] \cup]b,c[= [a,c[$). Notons que toute borne ouverte de I peut être approchée par des éléments d'un des I_k, mais n'appartient jamais à I. Pour l'étude qui suit, on s'intéressera à l'allure de la courbe sur l'un des I_k, lorsqu'on s'approche d'une telle borne ouverte, qui peut éventuellement être $+\infty$ ou $-\infty$.

Par exemple, pour la courbe donnée par $y(t) = 1/t$ et $x(t) = t$, il y a deux intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ et donc quatre endroits où regarder : l'approche de $-\infty$ puis celle de 0 dans I_1 et l'approche de 0 puis celle de $+\infty$ dans I_2. Pour simplifier, on parlera de 0^- et 0^+ lorsqu'on regarde le comportement en 0 approché par valeurs respectivement négatives ou positives.

6.22. Définition (branche infinie). Supposons que $I =]a,b[$ ou $[a,b[$ avec b éventuellement $+\infty$. On dit que la courbe admet une branche infinie en b si

$$\lim_{t\to b} \|\overrightarrow{op_t}\| = +\infty.$$

Le lecteur adaptera la définition au cas où la branche infinie est la borne de gauche de l'intervalle.



6.23. Définition (direction asymptotique). Supposons que la courbe admette une branche infinie en b. Alors si le vecteur $\overrightarrow{op_t}/\|\overrightarrow{op_t}\|$ admet un vecteur limite $\overrightarrow{v}$, on dit que la courbe admet une direction asymptotique en b et que le vecteur $\overrightarrow{v}$ pointe dans cette direction.

6.24. Exemple. Considérons la courbe paramétrée par les équations $x(t) = t^2$ et $y(t) = t$. Le vecteur $\overrightarrow{op_t}$ est donc de norme $|t|\sqrt{(1+t^2)}$ et le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{op_t}}{\|\overrightarrow{op_t}\|} = \left(\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{|t|\sqrt{1+t^2}}\right)$$

tend donc vers $(1,0)$ quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. On a donc dans les deux cas une direction asymptotique, vers laquelle le vecteur $(1,0)$ pointe. Voir la figure 9.

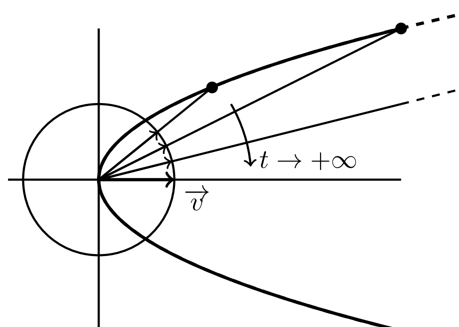


Figure 9. La courbe paramétrée $x(t) = t^2$ et $y(t) = t$ admet une direction asymptotique quand $t \to +\infty$, vers laquelle le vecteur $(1,0)$ pointe (elle admet la même direction quand $t \to -\infty$).

En pratique, on utilise souvent le critère suivant :

6.25. Proposition. *Si la courbe admet une branche infinie en b, alors si le rapport $y(t)/x(t)$ tend vers une limite α finie, la courbe admet une direction asymptotique vers laquelle le vecteur $\delta(1,\alpha)/\sqrt{1+\alpha^2}$ pointe, où δ est le signe de $x(t)$ pour t suffisamment grand. Si le rapport $x(t)/y(t)$ tend vers une limite β finie, la courbe admet une direction asymptotique vers laquelle le vecteur $(\beta,1)/\sqrt{1+\beta^2}$ pointe. On est toujours dans l'un de ces deux cas si la courbe admet une direction asymptotique, et les deux cas se produisent simultanément sauf si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.*
.

Démonstration. Si la courbe admet une branche infinie, alors au moins l'une des quantités $x(t)$ et $y(t)$ tend vers l'infini, donc ne s'annule plus pour t suffisamment proche de b et l'un des deux rapports considérés est alors bien défini. Supposons que c'est $x(t)/y(t)$. On écrit alors

$$\frac{\overrightarrow{op_t}}{\|\overrightarrow{op_t}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{y(t)}{|y(t)|}\frac{1}{\sqrt{1+x^2(t)/y^2(t)}}\begin{pmatrix} x(t)/y(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

puis on constate que dans la quantité de droite, $y(t)/|y(t)|$ est constant et vaut 1 ou -1 selon le signe de $y(t)$, et le reste tend bien vers la quantité considérée si et seulement si $\overrightarrow{op_t}/\|\overrightarrow{op_t}\|$ admet une limite. Le cas où $y(t)/x(t)$ a une limite finie est similaire. □

6.26. Proposition. *Si la courbe admet une direction asymptotique en b vers laquelle le vecteur unitaire $\overrightarrow{v}$ pointe, alors il y au plus une droite D telle que la distance de p_t à D tende vers 0 quand t tend vers b, et cette droite est de la forme $r + \lambda\overrightarrow{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Prenons n'importe quel point $r \in D$ et supposons que D soit donnée par $r + \lambda\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de norme 1 et p est un point (toute droite est de cette forme). Montrons alors que $\overrightarrow{u} = \pm\overrightarrow{v}$, et donc que D est bien de la forme annoncée (quitte à changer $\overrightarrow{u}$ en $-\overrightarrow{u}$ dans le paramétrage). Pour chaque point p de $\mathbb{R}^2$, il y a un unique point sur D à distance minimale de p (exercice facile, utilisant l'inégalité triangulaire). Pour p_t, appelons ce point r_t et considérons la fonction $t \mapsto \lambda(t)$ telle que $r_t = r + \lambda(t)\overrightarrow{u}$ (voir figure 10). Le vecteur $\overrightarrow{\epsilon_t} = \overrightarrow{p_t r_t}$

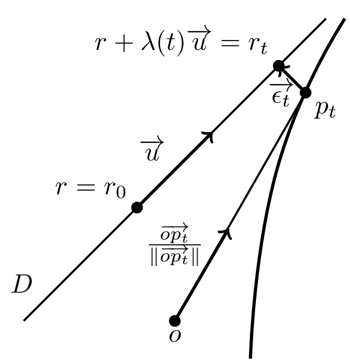


Figure 10.

tend vers 0 quand t tend vers b, par hypothèse. D'où

$$\overrightarrow{or} + \lambda(t)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{op_t} + \overrightarrow{\epsilon_t}$$

implique que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to b}\left(\frac{\lambda(t)}{\|\overrightarrow{op_t}\|}\overrightarrow{u}\right) &= \lim_{t\to b}\left(\frac{\overrightarrow{op}}{\|\overrightarrow{op_t}\|} + \frac{\overrightarrow{\epsilon_t}}{\|\overrightarrow{op_t}\|} - \frac{\overrightarrow{or}}{\|\overrightarrow{op_t}\|}\right) \\ &= \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire, en prenant la norme des deux côtés, on trouve que $|\lambda(t)|/\|\overrightarrow{op_t}\|$ doit tendre vers 1 et donc que $\overrightarrow{u} = \pm\overrightarrow{v}$. Supposons maintenant qu'il y ait deux droites D_1 et D_2 satisfaisant à la condition de l'énoncé, alors quitte à effectuer une rotation, on peut supposer que D_1 est l'axe des abscisses et D_2 est donnée par $y = c$. La distance de p_t à D_1 est alors $|y(t)|$ et celle à D_2 est $|y(t) - c|$. Si ces deux quantités tendent vers 0, alors $c = 0$ et $D_1 = D_2$. □

6.27. Définition (asymptote). Une droite D satisfaisant à la condition de la proposition 6.26 est appelée *asymptote* à la courbe quand t tend vers b.

⚠ Une courbe peut parfaitement admettre une direction asymptotique, sans admettre de droite asymptote. C'est le cas de la parabole de la figure 9.

En pratique, lorsqu'on a déjà trouvé la direction asymptotique, on peut utiliser le critère suivant, dont la preuve est évidente.

6.28. Proposition. *Supposons que la courbe admette un direction asymptotique vers laquelle le vecteur (v_x, v_y) pointe. Alors elle admettra une asymptote D d'équation $v_x y - v_y x + \beta = 0$ si et seulement si $\lim_{t\to b} v_x y(t) - v_y x(t) = -\beta$.*

6.29. Exercice. Considérons la courbe paramétrée donnée par $x(t) = (t^2 + 1)/2t$ et $y(t) = (t^2 - 1)/2t$, définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Trouver ses branches infinies, ses directions asymptotiques et ses droites asymptotes. Remarquons, bien que ce ne soit pas utile pour l'exercice, que la courbe admet $(x - y)(x + y) = 1$ comme équation cartésienne. Il s'agit d'une hyperbole. Voir la figure 11.

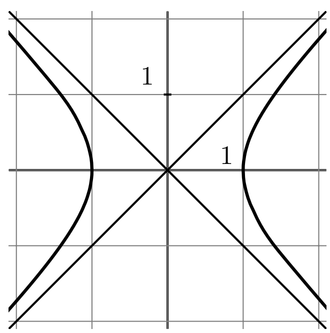


Figure 11. Hyperbole paramétrée par $x(t) = (t^2+1)/2t$ et $y(t) = (t^2 - 1)/2t$ et ses droites asymptotes

6.5. Changement de paramètre

Si J est une autre union d'intervalles et $\phi : J \to I$ est une bijection continue de réciproque ϕ^{-1} continue, on peut considérer la courbe paramétrée donnée par les fonctions $u = x \circ \phi$ et $v = y \circ \phi$. Il est clair qu'elle a le même support géométrique que la précédente. On dit qu'on a effectué un *changement de paramètre*. Pour faire une analogie physique, on peut penser qu'on parcourt la même trajectoire à une allure différente. Notons pour ce qui suit q_s le point $(x \circ \phi(s), y \circ \phi(s))$.

6.30. Remarque. Il est courant d'appeler le nouveau paramètre par un nouveau nom, par exemple s, et de masquer la fonction ϕ en l'appelant comme l'ancien paramètre t, qui devient donc une fonction de s qui vaut $t(s)$ en s. De même, les fonctions $u = x \circ \phi$ et $y = y \circ \phi$ du nouveau paramétrage sont parfois nommées à nouveau x et y, mais comme des fonctions dépendant de la variable s. Ce type de notation est souvent employé en physique et permet parfois de gagner du temps, mais peut prêter à confusion.

6.31. Proposition. *La notion de tangente n'est pas modifiée par un changement de paramètre. Si D est la tangente à la courbe (x, y) en t, alors D est la tangente à la courbe $(x \circ \phi, y \circ \phi)$ en $s = \phi^{-1}(t)$.*

Démonstration. C'est immédiat en remontant à la définition de la tangente 6.9 : le nouveau vecteur limite est obtenu en remplaçant la fonction λ par $\lambda \circ \phi$. On applique alors la composition des limites des fonctions continues. □

6.32. Proposition. *Si le changement de variable ϕ est dérivable, alors le nouveau vecteur vitesse est donné par*

$$\overrightarrow{q}'_s = \phi'(s) \overrightarrow{p}'_{\phi(s)}.$$

Si le changement de variable est deux fois dérivable, le nouveau vecteur accélération est donné par

$$\overrightarrow{q}''_s = \phi''(s) \overrightarrow{p} \phi(s) + \phi'(s)^2 \overrightarrow{p}'_{\phi(s)}.$$

Démonstration. On applique la composition des dérivées 1.23. □

6.6. Longueur d'une courbe

Si les deux fonctions x et y sont dérivables et de dérivées continues sur un intervalle $[a, b]$ et que la courbe n'a pas de point stationnaire, on dira alors que la courbe est *bien parcourue*. Cette terminologie n'est pas standard, et ne sert que pour cette partie.

On peut alors poser la définition suivante.

6.33. Définition (longueur d'une courbe). On définit la longueur d'une courbe bien parcourue comme le réel

$$\int_a^b \|\overrightarrow{p}'_t\| \, dt.$$

La proposition suivante montre que la longueur ne dépend pas du choix du paramétrage.

6.34. Proposition. *Si on effectue un changement de paramètre ϕ dérivable et de dérivée continue, on ne change pas la longueur d'une courbe bien parcourue.*

Démonstration. Si la fonction ϕ est bijective et continue, elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur $[a, b]$, par A.12. En particulier ϕ' est soit positive sur tout $[a, b]$, soit négative sur tout $[a, b]$. Supposons qu'elle est positive. On peut alors écrire

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \|\overrightarrow{q}'_t\| \, dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \|\phi'(t) \overrightarrow{p}'_t\| \, dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \phi'(t) \|\overrightarrow{p}'_t\| \, dt = \int_a^b \|\overrightarrow{p}'_t\| \, dt$$

en utilisant le théorème de changement de variable 3.38 pour la dernière égalité. Si au contraire ϕ' est négative, il y a un signe qui apparaît lorsqu'on la sort de la norme, mais il faut aussi inverser les bornes d'intégration, donc cela se compense. □

6.35. Remarque. La longueur ne dépend pas uniquement du support géométrique, car on peut parcourir plusieurs fois le même support, comme dans l'exemple de l'ellipse.

Pour les courbes bien parcourues, il existe un paramètre plus naturel que les autres : on paramètre la courbe par sa longueur ; en d'autres termes, on définit le changement de variable ϕ en donnant sa fonction réciproque

$$\phi^{-1}(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{p}'_u\| \, du.$$

La fonction ϕ^{-1} est strictement croissante puisque la courbe n'est pas stationnaire (exercice facile), elle admet donc bien une fonction réciproque ϕ. De plus, ϕ^{-1} est dérivable et de dérivée continue par le théorème fondamental de l'analyse 3.33. Sa dérivée étant la norme de $\overrightarrow{p}'$, elle est non nulle partout puisque la courbe est bien parcourue, donc par la proposition A.13, la fonction réciproque ϕ est également dérivable, de dérivée

$$\phi'(s) = 1/\|\overrightarrow{p}'_{\phi(s)}\|$$

qui est continue comme inverse de fonction continue.

6.36. Proposition. *La nouvelle courbe $q = (x \circ \phi, y \circ \phi)$ a un vecteur vitesse $\overrightarrow{q}'_s$ tel que $\|\overrightarrow{q}'_s\| = 1$.*

Démonstration. On a $\|\overrightarrow{q}'_s\| = \|\phi'(s)\overrightarrow{p}'_{\phi(s)}\| = 1$ par la valeur de ϕ' ci-dessus. □

Montrons maintenant que le nombre obtenu par la définition 6.33 se comporte bien comme une longueur.

6.37. Proposition. *Considérons la courbe donnée par $p_t = p + t\overrightarrow{d}$, dont le support géométrique est un segment de droite. Sa longueur est $(b-a)\|\overrightarrow{d}\|$.*

Démonstration. Le vecteur $\overrightarrow{p}'_t$ vaut $\overrightarrow{d}$ et est donc constant. La longueur est donc donnée par $\int_a^b \|\overrightarrow{d}\| \, du = (b-a)\|\overrightarrow{d}\|$. □

La longueur de deux courbes mis bout-à-bout est bien la somme des longueurs :

6.38. Proposition. *Soit une courbe de paramètre défini sur $[a,b]$ et soit $c \in [a,b]$. Alors la longueur de la restriction de la courbe à $[a,c]$ plus celle de la restriction de la courbe à $[c,b]$ est égale à la longueur de la courbe totale.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la relation de Chasles 3.31. □

Utilisons la notation $\mathcal{D} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ pour une subdivision de $[a,b]$.

6.39. Proposition. *La longueur d'une courbe bien parcourue sur $[a,b]$ vaut*

$$\sup_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{p_{t_{i-1}}p_{t_i}}\|$$

où $\mathcal{D}$ parcourt les subdivisions de $[a,b]$.

Démonstration. La preuve de cette proposition requière plusieurs petits résultats intermédiaires. Commençons par montrer le lemme suivant :

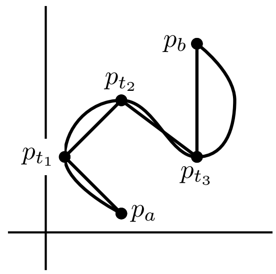


FIGURE 12. La longueur de la courbe est supérieure à la somme des longueurs des segments correspondant à la subdivision $\mathcal{D} = \{a, t_1, t_2, t_3, b\}$, et c'est même la borne supérieure de ces sommes sur toutes les subdivisions $\mathcal{D}$.

6.40. LEMME. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $\mathcal{D}$ dont tous les écarts $t_i - t_{i-1}$ sont $< \delta$, et pour tous choix de u_i et v_i entre t_{i-1} et t_i, on a*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\sqrt{x'(u_i)^2 + y'(v_i)^2} - \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\right| < \epsilon.$$

DÉMONSTRATION. L'idée est d'utiliser l'uniforme continuité pour montrer que la somme est proche de la même somme avec $v_i = u_i$, puis de reconnaître une somme de Riemann. Donnons maintenant les détails techniques. La fonction y'^2 étant continue sur $[a, b]$, elle est uniformément continue, par A.10. Par conséquent, pour tout $\epsilon_1 > 0$, il existe un δ_1 tel que si $|v_i - u_i| < \delta_1$, on a $|y'(v_i)^2 - y'(u_i)^2| < \epsilon_1$. De même, en utilisant l'uniforme continuité pour la fonction racine, pour tout $\epsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que si $|z_1 - z_2| < \delta_2$, alors $\left|\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}\right| < \epsilon_2$. Enfin, par 3.44, pour tout $\epsilon_3 > 0$, il existe $\delta_3 > 0$ tel que si $\mathcal{D}$ est telle que $t_i - t_{i-1} < \delta_3$ pour tout i, alors,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\sqrt{x'(u_i)^2 + y'(u_i)^2} - \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\right| < \epsilon_3.$$

En prenant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_3$, et $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, on a donc le résultat par inégalité triangulaire. $\square$

Revenons maintenant à la preuve de la proposition. Montrons d'abord les trois points suivants :

(1) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $\mathcal{D}$ telle que $t_i - t_{i-1} < \delta$ pour tout i, on ait
$$\left|\int_a^b \|\overrightarrow{p}_t'\|\,dt - \sum_{i=1}^{n}\|\overrightarrow{p_{t_{i-1}}p_{t_i}}\|\right| < \epsilon;$$

(2) si $\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{D}}$,
$$\sum_{i=1}^{n}\|\overrightarrow{p_{t_{i-1}}p_{t_i}}\| \leq \sum_{i=1}^{n}\|\overrightarrow{p_{\tilde{t}_{i-1}}p_{\tilde{t}_i}}\|;$$

(3) $\sum_{i=1}^{n}\|\overrightarrow{p_{t_{i-1}}p_{t_i}}\| < \int_a^b \|\overrightarrow{p}_t'\|\,dt$ pour toute subdivision $\mathcal{D}$.

Le point 1 suit du lemme, en remarquant que pour tout i, $x(t_i) - x(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})x'(u_i)$ pour un certain $u_i \in]t_{i-1}, ti[$ par le théorème des accroissements finis 1.19, et de même $y(t_i) - y(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})y'(v_i)$.

Le point 2 est une conséquence de l'inégalité triangulaire.

Le point 3 découle alors des deux précédents : en effet, si pour une subdivision $\mathcal{D}$ la somme dépassait de $\epsilon > 0$ l'intégrale, alors par les points 1 et 2, on pourrait la raffiner de manière à ce que la somme devienne à la fois plus grande et plus proche de l'intégrale, ce qui est impossible.

Il est alors clair par les points 1 et 3 que l'intégrale est bien la borne supérieure recherchée, ce qui achève la preuve de la proposition. □

Et finalement, voici le clou du spectacle, l'aphorisme que tout le monde connaît : “le plus court chemin d'un point à un autre, c'est la droite”. Avec notre définition de la longueur, cela s'énonce donc comme suit, toujours sous les hypothèses que les courbes considérées sont dérivables et de dérivée continue.

6.41. Théorème. *La longueur de n'importe quelle courbe passant par les points $p_a = (x(a), y(a))$ et $p_b = (x(b), y(b))$ est supérieure ou égale à $\|\overrightarrow{p_a p_b}\|$. Elle est donc supérieure à la longueur d'une courbe dont le support géométrique est le segment de droite entre p_a et p_b. De plus, toute courbe dont la longueur est égale à $\|\overrightarrow{p_a, p_b}\|$ a pour support géométrique ce segment de droite.*

Démonstration. C'est un corollaire direct de la proposition 6.39. La norme du segment de droite est obtenu en prenant la subdivision triviale $(t_0 = a, t_1 = b)$ de $[a, b]$, ce qui implique l'inégalité. En cas d'égalité, raisonnons par l'absurde et supposons que le point de la courbe pour $t = c$ ne se trouve pas sur le segment de droite. Alors, en prenant la subdivision (a, c, b), on obtient que la longueur de la courbe est supérieure ou égale à $\|\overrightarrow{p_a p_c}\| + \|\overrightarrow{p_c p_b}\|$, qui est strictement supérieur à $\|\overrightarrow{p_a p_b}\|$ par l'inégalité triangulaire, ce qui est absurde. □

6.42. Exemple. Calculons la longueur d'un cercle, paramétré de la manière classique $x(t) = r\cos(t)$ et $y(t) = r\sin(t)$. On a immédiatement

$$\int_0^{2\pi} \|\overrightarrow{p}_t'\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

ANNEXE A

Rappels divers

A.1. Pente d'une droite

A.1. Définition. La *pente* d'une droite d'équation $y = ax + b$ est le coefficient a.

Intuitivement, ce nombre nous dit à quel point la droite “monte” ou “descend” quand x croît. Lorsque la pente est un nombre positif, plus il est grand, plus la droite monte. Lorsque la pente est nulle, la droite est horizontale. Lorsque la pente est un nombre négatif, plus sa valeur absolue est grande, plus la droite descend.

Bien entendu, si on considère la fonction linéaire f donnée par $f(x) = ax + b$, on retrouve le coefficient a comme la limite du taux de variation en n'importe quel point : $a = \lim_{x_1 \to x} \left(f(x_1) - f(x)\right)/(x_1 - x)$.

A.2. Propriétés des réels

Voici quelques propriétés des nombres réels qu'on utilise souvent dans ce cours. Pour les démontrer, il faudrait commencer par donner une définition des nombres réels. Il existe plusieurs constructions pour y arriver, qui donnent bien sûr toutes le même résultat, mais ce n'est pas l'objet de ce cours. Nous sauterons donc les démonstrations de ces propriétés.

A.2. Proposition (existence des bornes supérieures et inférieures). *Toute partie E non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure, c'est-à-dire un minorant qui est plus grand que tous les autres. On la note* $\inf(E)$. *De même, toute partie E non vide majorée admet une borne supérieure, c'est-à-dire un majorant qui est plus petit que tous les autres. On la note* $\sup(E)$.

Bien que cela paraisse évident, lorsqu'on utilise cette proposition, il faut souvent bien vérifier qu'on l'applique à un ensemble non vide.

A.3. Proposition (densité des rationnels). *Soient a et b deux réels, avec $a < b$. Alors il existe un nombre rationnel r tel que $a < r < b$.*

A.3. Ouverts de $\mathbb{R}$

A.4. Définition. Soient $a < b$ deux réels, avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$. L'*intervalle ouvert* $]a, b[$ est le sous-ensemble $\mathbb{R}$ constitué des réels x tels que $a < x < b$.

A.5. Définition. Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est appelé un *sous-ensemble ouvert* ou plus simplement un *ouvert* de $\mathbb{R}$ s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes.

(1) U est une réunion (éventuellement infinie) d'intervalles ouverts ;

(2) Tous les points de U sont des points intérieurs.

DÉMONSTRATION. Montrons que 1 implique 2. Soit x un point de U. Il est dans un intervalle $]a, b[$ contenu dans U, puisque U est une réunion de tels intervalles. Il est donc intérieur. Montrons que 2 implique 1. Pour chaque $x \in U$, comme U est intérieur, il existe un intervalle $]a_x, b_x[$ contenant x. On a alors $U = \bigcup_{x\in U}]a_x, b_x[$. □

Bien entendu, un intervalle ouvert est un ouvert, par la propriété 1, donc l'appellation est cohérente.

A.6. EXERCICE. Montrer que $\mathbb{R}$ privé de 0 et de l'ensemble $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ est un ouvert.

A.4. Limite

Rappelons la définition que nous utilisons pour la limite d'une fonction réelle en un point.

A.7. DÉFINITION. Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert non vide I, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $a \in I$ et soit l un réel. On dit que f *tend vers* l *en* a ou que *la limite de* f *en* a *existe et vaut* l si

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I \qquad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

On montre facilement qu'un tel l, s'il existe, est unique. On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

S'il n'en existe aucun tel l, on dit que f *n'a pas de limite en* a.

La raison pour laquelle cette définition est rappelée est qu'il y a une petite ambigüité dans la littérature. Ici, dans ce texte, on impose dans la définition de limite que x soit différent de a (par la condition $0 < |x - a|$). La limite représente donc la valeur vers laquelle la fonction s'approche lorsque x s'approche de a *sans l'atteindre*. Cela implique par exemple que la fonction qui vaut zéro partout sauf pour $x = 0$ où elle vaut 1 a une limite quand x tend vers 0, et cette limite est 0.

A.5. Continuité

Commençons par rappeler trois théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues.

A.8. THÉORÈME (des valeurs intermédiaires). *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et soit* $I = [f(a), f(b)]$ *si* $f(a) \leq f(b)$ *ou* $[f(b), f(a)]$ *si* $f(b) \leq f(a)$*. Alors pour tout* $y \in I$*, il existe* $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = y$*.*

DÉMONSTRATION. Voir [**Spi80**, th. 1 p. 108 et th. 4 p. 109]. □

A.9. THÉORÈME. *Toute fonction continue sur* $[a, b]$ *est bornée sur* $[a, b]$ *et atteint ses bornes.*

DÉMONSTRATION. Voir [**Spi80**, th. 3 p. 108]. □

A.10. THÉORÈME. *Toute fonction continue sur un intervalle fermé* $[a, b]$ *est* uniformément continue*, c'est-à-dire que pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x, x' \in [a, b]$ *tels que* $|x - x'| < \delta$*, on ait* $|f(x') - f(x)| < \epsilon$*.*

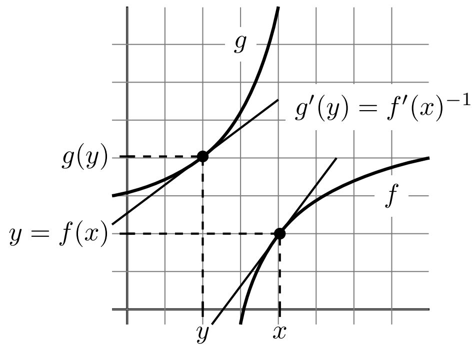


FIGURE 1. Une fonction f et sa fonction réciproque g

DÉMONSTRATION. Voir [Spi80, th. 1 p. 131]. □

Dans le théorème précédent, l'intervalle $[a, b]$ doit être fermé, et a et b ne peuvent pas être infinis.

A.11. THÉORÈME. *Soient I un intervalle non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante et d'image J. Alors J est un intervalle et f admet une fonction réciproque, c'est à dire qu'il existe une fonction $g : J \to \mathbb{R}$ d'image I telle que pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in J$,*

$$g(f(x)) = x \qquad \textit{et} \qquad f(g(y)) = y.$$

De plus, la fonction g est strictement croissante et continue.

DÉMONSTRATION. Comme la fonction f est strictement croissante, elle est injective. Elle est donc bijective sur son image J, qui est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires A.8.

La fonction g est strictement croissante car si $y_1 < y_2$ avec $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On ne peut pas avoir $x_2 < x_1$ sinon f ne serait pas strictement croissante, et on ne peut pas avoir $x_1 = x_2$ sinon on aurait $f(x_1) = f(x_2)$.

On montre alors la continuité en revenant à la définition. En un point x qui n'est pas une borne de I, pour tout $\epsilon > 0$, on choisit deux points $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x < x_2$ et tels que $|x - x_1| < \epsilon$ et $|x - x_2| < \epsilon$. On pose alors $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, puis on considère $\delta = \min\{|y - y_1|, |y - y_2|\}$. On a alors que pour tout z tel que $|y - z| < \delta$, on a $y_1 < z < y_2$, d'où $x_1 = g(y_1) < g(z) < g(y_2) = x_2$ et donc $|g(z) - g(y)| < \epsilon$. Si x est une borne de I, on ne raisonne qu'avec x_1 ou x_2. □

A.12. PROPOSITION. *Si $f : [a, b] \to [c, d]$ (resp. $\phi :]a, b[\to]c, d[$) est une fonction continue et bijective, alors elle est soit strictement croissante sur $[a, b]$ (resp. sur $]a, b[$) soit strictement décroissante.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. Il existerait alors $x_1 < x_2$ avec $f(x_1) \geq f(x_2)$ et $x_3 < x_4$ avec $f(x_3) \leq f(x_4)$. En regardant les positions relatives de $x_1, \ldots, x_4$ et de $f(x_1), \ldots, f(x_4)$, on montre aisément qu'on peut extraire de $x_1, \ldots, x_4$ trois d'entre eux, notés x'_1, x'_2 et x'_3 tels que $x'_1 < x'_2 < x'_3$ et

$f(x'_1) \leq f(x'_2) \geq f(x'_3)$ ou $f(x'_1) \geq f(x'_2) \leq f(x'_3)$ et on conclue que f n'est pas bijective en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires A.8. $\square$

A.13. PROPOSITION. *Dans la situation du théorème A.11, si la fonction f est de plus dérivable et de dérivée strictement positive, alors la fonction g est également dérivable et on a*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, puisque $f'(x)$ est strictement positive, pour x suffisamment proche de x_1, le taux $\Delta_f(x, x_1)$ est non nul. On a alors $\Delta_g(y, y_1) = 1/\Delta_f(x, x_1)$ où $x = g(y)$ et $x_1 = g(y_1)$. Quand y_1 tend vers y, par continuité de g, le réel x_1 tend vers x. Par continuité de la fonction inverse, on a donc bien le résultat. $\square$

Bibliographie

[Bou76] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Hermann, Paris, 1976, Fonctions d'une variable réelle, Théorie élémentaire, Nouvelle édition.

[Gou08] X. Gourdon, *Les maths en tête. analyse*, Ellipses, 2008, Deuxième édition.

[LFA77a] J. Lelong-Ferrand and J.-M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques. Tome 2*, Dunod, Paris, 1977, Analyse, Quatrième édition, 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques.

[LFA77b] ———, *Cours de mathématiques. Tome 3*, Dunod, Paris, 1977, Géométrie et cinématique, Deuxième édition, 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques.

[Spi80] M. Spivak, *Calculus*, Publish or Perish, Berkeley, California, U.S.A., 1980, Deuxième édition.

Index