Arithmétique
FICHE I: Relations d'équivalence

Exercice 1. Trouver toutes les relations d'équivalence possibles sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 2. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et R la relation binaire donnée par

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}.$$

(1) Vérifier que R est une relation d'équivalence.

(2) Lister les classes d'équivalence et donner l'ensemble quotient E/R.

Exercice 3. On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Décrire la classe d'équivalence d'un point quelconque (x, y).

(3) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2/R & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

est bien définie et que c'est une bijection.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des nombres premiers strictements supérieurs à 2. On considère la relation R sur E définie par :

$$pRq \Longleftrightarrow \frac{p+q}{2} \in E.$$

Cette relation est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 5. Les relations R définies ci-dessous sont-elles des relations d'équivalence sur $\mathbb{C}$?

(1) $zRz' \Longleftrightarrow |z| = |z'|$

(2) $zRz' \Longleftrightarrow e^z = e^{z'}$

(3) $zRz' \Longleftrightarrow |z - z'| = 1$

(4) $zRz' \Longleftrightarrow |z - z'| < 1$

(5) $zRz' \Longleftrightarrow |e^{z-z'}| = 1$

Exercice 6. Soit E un ensemble et $x \in E$. Les relations R définies ci-dessous sont-elles des relations d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$?

(1) $ARB \Longleftrightarrow A \subset B$

(2) $ARB \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

(3) $ARB \Longleftrightarrow x \in A \cup B$

(4) $ARB \Longleftrightarrow (x \in A \cap B$ **ou** $x \in \bar{A} \cap \bar{B})$

Exercice 7. Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation d'équivalence R par
$$XRY \iff A \cap X = A \cap Y.$$
(1) Vérifier que R est une relation d'équivalence.

(2) Expliciter les classes de $\emptyset$, E, A et $\bar{A}$.

(3) Montrer que si $B = A \cap X$, alors B est l'unique représentant de $\overline{X}$ inclus dans A.

(4) Trouver une bijection entre $\mathcal{P}(E)/R$ et $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 8. Soit R la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par
$$xRy \iff x^2 - y^2 = x - y.$$
(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.

(3) Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 9. Soit U_{12} l'ensemble des racines 12-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. On définit dessus la relation binaire
$$\xi R \zeta \iff \xi^4 = \zeta^4.$$
(1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.

(2) Décrire l'ensemble des classes d'équivalence.

Exercice 10. Soit R la relation binaire définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par
$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc.$$
(1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.

(2) Montrer que toute classe admet un unique représentant (p,q) avec $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$.

(Félicitations, vous venez de construire les rationnels à partir des nombres entiers.)

Exercice 11. Dans la situation de l'exercide 3, montrer que la relation d'équivalence R est en fait égale à R_f pour une fonction f bien trouvée (cf. cours). Revoir la dernière question à la lumière de cette nouvelle interprétation.

Exercice 12. Faire de même pour l'exercice 5, dans les cas où l'on a bien une relation d'équivalence.

Exercice 13. 8 Faire de même pour l'exercice 5.

Exercice 14. Soit E l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (i.e. continues sauf en un nombre fini de points). Muni de l'addition des fonctions, c'est un groupe abélien. On considère l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ qui envoie une fonction vers son intégrale sur $[0,1]$. Soit F le sous-ensemble de E constitué des fonctions qui sont nulle sauf en un nombre fini de points.

(1) Montrer que F est un sous-groupe de E.

(2) Quand deux fonctions sont-elles équivalentes par la relation associée à F?

(3) Montrer que ϕ passe au quotient E/F.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $\mathrm{pgcd}(-, n) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ qui à un entier m associe $\mathrm{pgcd}(m, n)$. (Rappelons que si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{pgcd}(0, n)$ est bien défini et vaut n.)

(1) Montrer que cette fonction passe aux classes d'équivalence modulo n.

(2) En déduire une application $\mathrm{pgcd}((-) \mod n, n) : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{pgcd}(m \mod n, n) = \mathrm{pgcd}(m, n) \mod n$.

(3) Pour quels entiers $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $\mathrm{pgcd}(-, k)$ passe-t-elle aux classes modulo n ?

Exercice 16. Dans le contexte de l'exercice 10, on définit la loi + suivante sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

(où le + du membre de droite est l'addition usuelle des entiers).

(1) Montrer que cette loi est associative, commutative, qu'elle a un élément neutre, mais que la plupart des éléments n'ont pas d'opposé.

(2) Montrer que cette loi passe au quotient par la relation d'équivalence de l'exercice 10.

(3) Montrer que la loi induite sur le quotient est une loi de groupe, abélien de surcroit.

(Félicitations, vous venez de définir l'addition des rationnels.)

Exercice 17. Soit $\star$ une loi interne $E \times E \to E$ qui passe au quotient par une relation d'équivalence R sur E. Montrer que si $\star$ est associative ou commutative, il en est de même de la loi induite sur le quotient E/R.