Université d'Artois — Année universitaire 2021-2022
Faculté des Sciences Jean Perrin — Licence 2 Math

Arithmétique
FICHE IV: Nombres réels

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que le sous-groupe (additif) de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et α est dense si et seulement si α est irrationnel et si α est rationnel, en trouver un générateur.

Exercice 2. (1) Déterminer à la main le développement binaire de $\sqrt{2}$ jusqu'au troisième chiffre après la virgule.

(2) Fort de cet exemple, montrer que le k-ième chiffre après la virgule du développement en base 2 de $\sqrt{2}$ est 0 si le plus grand a tel que $a^2 \leq 2^{2k+1}$ est pair et 1 s'il est impair.

(3) Dans quelle direction peut-on généraliser la question précédente ?

Exercice 3. Écrire sous forme d'une fraction irréductible le rationnel correspondant à chacun des développements décimaux périodiques suivants.

$$0,33\underline{3}\ldots \qquad 0,12\underline{12}\ldots \qquad 3,\underline{142857}\ldots$$

Exercice 4. Déterminer le développement décimal de chacune des fractions suivantes.

$$\frac{4}{25} \qquad \frac{11}{9} \qquad \frac{1}{7}$$

Exercice 5. Déterminer les développements en base 2 des nombres suivants.

$$\frac{1}{32} \qquad \frac{1}{3} \qquad 2^{37}-1$$

Exercice 6. Développer $\frac{1}{d-1}$ en base $d > 1$.

Exercice 7. Soit $d > 1$ un entier et $b > 0$ un entier premier à d. On s'intéresse au développement en base d d'un rationnel $\frac{r}{b} < 1$ écrit sous forme irréductible. On considère la division euclidienne par b

$$r_{k+1}d = q_k b + r_k$$

definissant les (r_k, q_k) pour $k \leq 0$ par récurrence décroissante à partir de $k = 0$, $r_0 = r$ et $q_0 = 0$. On a vu dans le cours que q_k est alors le k-ème chiffre dans le développement en base d de $\frac{r}{b}$.

(1) Montrer que pour tout $k \leq 0$, on a $\mathrm{pgcd}(r_k, b) = 1$.

(2) Montrer que pour un $k < 0$ donné, la connaissance de r_k donne immédiatement q_k (indice : regarder modulo d).

(3) En raisonnant modulo b, voir que la suite des restes apparaissant sont r, dr, d^2r etc.

(4) En déduire que la période du développement en base d de $\frac{r}{b}$ divise l'ordre de d dans $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times$ et donc $\phi(b)$ et que la partie périodique commence dès $k = -1$.

(5) Application : Donner le développement de $\frac{1}{61}$ en base 60.

Exercice 8. Traduire le procédé diagonal de Cantor pour montrer directement qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$, sans utiliser de fonctions caractéristiques.

Exercice 9. Montrer à nouveau que $[0,1[$ et donc les réels ne sont pas dénombrables en adaptant directement le procédé diagonal de Cantor sur leurs développements en base 3.

Exercice 10. On considère le sous-groupe additif $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbb{R}$. Montrer qu'il est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si α/β est irrationnel. Dans le cas contraire, si $\alpha/\beta = a/b$ en est l'expression en fraction irréductible, écrire ce sous-groupe sous la forme $\langle x \rangle = x\mathbb{Z}$ pour un x bien choisi.