Nombres réels

Baptiste Calmès

23 décembre 2020

Table des matières

1 Propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$

On ne rappellera pas ici la construction des réels à partir des rationnels mais seulement des propriétés axiomatiques qui suffisent à le caractériser, ainsi que quelques conséquences.

1.1 Définition. Un *corps totalement ordonné* est un corps K muni d'une relation d'ordre $\leq$ totale telle que

— Pour tous x, y et z, si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$;

— Pour tous $x, y \geq 0$, on a $xy \geq 0$.

Un *morphisme de corps ordonnés* $K_1 \to K_2$ est un morphisme croissant d'anneaux unitaires $K_1 \to K_2$ (qui respecte alors automatiquement les inverses).

1.2 Lemme. *Dans un tel corps, on a*

1. $x < y$ *implique* $x + z < y + z$ *pour tout* z *;*
2. $x \leq y$ *implique* $-y \leq -x$ *;*
3. $x^2 \geq 0$ *pour tout* x*, avec égalité si et seulement si* $x = 0$*;*
4. $1 > 0$*;*

1.3 Théorème. *Tout corps totalement ordonné contient un unique sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$, et cet isomorphisme est unique.*

On dit alors qu'un tel corps *contient* $\mathbb{Q}$ puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la manière dont il le contient.

On construit[1] alors un corps, noté $\mathbb{R}$, par une des méthodes classiques (coupures de Dedekind ou classes d'équivalence de suites de Cauchy), puis on le munit d'une relation d'ordre totale, et on montre que :

1.4 Proposition (propriété de la borne supérieure)**.** *Tout sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ admet une unique borne supérieure (un élément minimal parmi les majorants).*

1.5 Remarque. On montre immédiatement en multipliant par -1 que toute partie non vide admettant un minorant a une borne inférieure.

1.6 Proposition. *Toute suite réelle croissante majorée converge, et sa limite est la borne supérieure de ses valeurs.*

1.1 $\mathbb{R}$ est archimédien

1.7 Lemme. *Le sous-ensemble $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas majoré ni minoré.*

1.8 Théorème ($\mathbb{R}$ est archimédien)**.** *Soit $a, x \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. Alors il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leq x < (n+1)a$.*

1.9 Définition. Quand $a = 1$, cet entier n est appelé *partie entière* de x et notée $\lfloor x \rfloor$. La différence $\lfloor x \rfloor - x$ est appelée *partie fractionnaire* ou *mantisse* de x.

⚠ Attention, le terme *partie fractionnaire* est trompeur car il ne s'agit nullement d'une fraction en général.

1.10 Lemme. *Pour tout réel x et tout entier $d > 0$, on a* $\left\lfloor \frac{\lfloor dx \rfloor}{d} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

1. Voir le cours d'analyse 1.

1.2 Densité des rationnels

1.11 Définition. On dit qu'un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ si tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ a une intersection non vide avec X ; de manière équivalente, tout intervalle ouvert non vide a une intersection non vide avec X.

1.12 Exemple. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est également dense dans $\mathbb{R}$.

1.3 Caractérisation de $\mathbb{R}$

Les propriétés passées en revue précédemment permettent de caractériser les réels. Ainsi :

1.13 Théorème. *L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de son addition, de sa multiplication et de la relation d'ordre $\leq$ est un corps totalement ordonné qui vérifie la propriété de la borne supérieure. À isomorphisme (unique) de corps ordonné près, c'est l'unique tel corps totalement ordonné.*

2 Sous-groupes de $\mathbb{R}$

2.1 Théorème. *Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $\langle x \rangle = x\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$ et ces deux cas s'excluent.*

3 Développement des réels en une base

Fixons un nombre entier $d > 1$. L'exemple le plus commun est $d = 10$.

3.1 Définition

Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.

3.1 Définition (développement en base d)**.** Un *développement en base d* est une application $u : \mathbb{Z} \to \{0, \ldots, d-1\}$ de limite nulle en $+\infty$, autrement dit il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $u_k = 0$ pour $k \geq n$.

On le note comme une suite : on écrit u_k plutôt que $u(k)$.
L'élément u_0 est appelé chiffre des unités,
Quand $d = 10$, u_1 est appelé chiffre des dizaines, u_2 des centaines, u_{-1} des dixièmes, u_{-2} des centièmes, etc.

3.2 Définition. Un développement en base d est dit *impropre* (resp. *fini*) s'il existe un rang n tel que pour tout $k \leq n$, on a $u_k = d - 1$ (resp. $u_k = 0$). Il est dit *propre* (resp. *fini*) sinon.

Étant donné $x \in \mathbb{R}_+$, on lui associe un développement $\left(x_k^{\langle d \rangle}\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ en base d défini par :

$$x_k^{\langle d \rangle} \quad \text{est le reste de la division euclidienne de } \lfloor x/d^k \rfloor \text{ par } d.$$

3.3 Lemme. *La suite obtenue est bien un développement en base d.*

3.4 Lemme. *Pour tous $n, k \in \mathbb{Z}$, on a $x_k^{\langle d \rangle} = d^n x_{k+n}^{\langle d \rangle}$ et $x_n^{\langle d \rangle} = \left(\frac{x}{d^n}\right)_0^{\langle d \rangle} = \left\lfloor \frac{x}{d^n} \right\rfloor_0^{\langle d \rangle}$.*

3.5 Lemme. *Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $k < n \in \mathbb{Z}$. Alors $x_k^{\langle d \rangle}$ ne dépend que de la classe de x dans $\mathbb{R}/d^n\mathbb{Z}$. Autrement dit, si $y \in x + d^n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, alors $x_k^{\langle d \rangle} = y_k^{\langle d \rangle}$ pour tout $k < n$.*

3.6 Lemme. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*
$$\left\lfloor \frac{x}{d^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{d^{n+1}} \right\rfloor d + x_n^{\langle d \rangle}$$

3.7 Lemme. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*
$$\left\lfloor \frac{x}{d^n} \right\rfloor d^n = \sum_{k \geq n} x_k^{\langle d \rangle} d^k.$$

Dans l'autre sens, si $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un développement en base d, on lui associe un réel positif (ou nul) par :
$$x = \sum_{\mathbb{Z}} u_k d^k \tag{3.1}$$
C'est justifié par le théorème suivant :

3.8 Théorème. *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un développement en base d. Alors la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k d^k$ converge et le reste à l'ordre n admet la majoration*
$$\sum_{k<n} u_k d^k \leq d^n$$
avec égalité si et seulement si $u_k = d-1$ pour tout $k < n$ (et donc l'égalité implique que ce développement est impropre).

3.9 Corollaire. *Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux développements en base d. Si leurs sommes sont égales, alors soit $u_k = v_k$ pour tout k, soit il existe n tel que*

— $u_k = v_k$ *pour tout* $k > n$,

— $v_n = u_n + 1$ *(ou* $u_n = v_n + 1$*) et*

— $u_k = 9$ *et* $v_k = 0$ *(ou* $u_k = 0$ *et* $v_k = 9$ *respectivement) pour tout* $k < n$.

3.10 Notation. Pour dire que la somme ci-dessus vaut x, on écrit alors souvent
$$x = u_n u_{n-1} \cdots u_1 u_0, u_{-1} u_{-2} \cdots$$
(la base étant implicite). Noter la présence d'une virgule entre u_0 et u_{-1}.

3.11 Théorème (approximation d-cimale)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors*
$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k^{\langle d \rangle} d^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k<n} x_k^{\langle d \rangle} d^k < d^n.$$
En particulier $\sum_{k\geq n} x_k^{\langle d \rangle} d^k$ est une approximation de x à d^n près. De plus $(x_k^{\langle d \rangle})_{k\in\mathbb{Z}}$ est propre.

3.12 Proposition. *Un $x \in \mathbb{R}_+$ est entier si et seulement si $x_k^{\langle d \rangle} = 0$ pour tout $k < 0$.*

3.13 Définition. Un nombre réel est appelé *d-cimal* s'il est dans $d^n\mathbb{Z}$ pour un $n \in \mathbb{Z}$ (et donc pour tous les n plus petits). On note $\mathbb{D}_d = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} d^n\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres réels d-cimaux.

3.14 Lemme. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $d^n\mathbb{D}_d = \mathbb{D}_d$.*

Si $d \neq e$, on a $\mathbb{D}_d \neq \mathbb{D}_e$. De plus, il est évident que $\mathbb{D}_d \subset \mathbb{Q}$ mais l'inclusion inverse est fausse, par exemple $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}_{10}$ (mais $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}_3$).

3.15 Proposition. *Un nombre réel x est dans $\mathbb{D}_d$ si et seulement si son développement est fini. Plus précisément, x est dans $d^n\mathbb{Z}$ si et seulement si $x_k^{\langle d \rangle} = 0$ pour $k < n$.*

Dans l'autre sens :

3.16 Proposition. *Étant donné un développement* $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$*, qui est propre. Notons* x *sa somme. Alors* $x_k^{\langle d\rangle} = u_k$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*.*

3.17 Proposition. *Étant donné un développement* $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$*, qui est impropre, et de somme* x*, Soit* n *le plus petit entier tel que* $u_k \neq d-1$*. Alors on a*

$$x_k^{\langle d\rangle} = \begin{cases} u_k & \textit{si } k > n\,; \\ u_k + 1 & \textit{si } k = n\,; \\ 0 & \textit{si } k < n. \end{cases}$$

De plus $\left(x_k^{\langle d\rangle}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est l'unique autre développement de même somme que* $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$*.*

3.18 Proposition. *Un développement est de somme dans* $\mathbb{D}_d$ *si et seulement s'il est fini ou impropre. Plus précisément, si* $u_k = 0$ *(resp.* $u_k = d-1$*) pour* $k < n$*, alors sa somme est dans* $d^n\mathbb{Z}$*.*

3.19 Théorème. *Les applications*

$$x \mapsto (x_k^{\langle d\rangle})_{k\in\mathbb{Z}} \quad \textit{et} \quad (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k d^k$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre entre $\mathbb{R}_+$ *et l'ensemble des développements* propres *en base* d*.*

3.2 Additions et retenues

3.20 Théorème (retenues)**.** *Soient* $x, y \in d^n\mathbb{N}$*. Alors le développement de* $x+y$ *est donné par la procédure récursive suivante :*

$$(x+y)_k^{\langle d\rangle} = \begin{cases} 0 & \textit{si } k < n \\ x_k^{\langle d\rangle} + y_k^{\langle d\rangle} + \mathrm{r}_{k-1} \mod d & \textit{si } k \geq n \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{r}_k = \begin{cases} 0 & \textit{si } k < n \\ 0 & \textit{si } x_k^{\langle d\rangle} + y_k^{\langle d\rangle} + \mathrm{r}_{k-1} < d \\ 1 & \textit{si } x_k^{\langle d\rangle} + y_k^{\langle d\rangle} + \mathrm{r}_{k-1} \geq d. \end{cases}$$

Le nombre r_k *est appelé* retenue *au rang* k*.*

3.3 Rationnels

3.21 Lemme. *Soient* $a \in \mathbb{N}$*,* $b \in \mathbb{N}^*$ *et* r *le reste de la division euclidienne de* a *par* b*. Alors pour tout* $k < 0$*, on a* $\left(\frac{a}{b}\right)_k^{\langle d\rangle} = \left(\frac{r}{b}\right)_k^{\langle d\rangle}$

Étant donnés $r \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $r < b$, on définit deux suites $(r_k)_{k\in-\mathbb{N}}$ et $(q_k)_{k\in-\mathbb{N}}$ en posant $q_0 = 0$, $r_0 = r$ puis par récurrence (décroissante) en faisant la division euclidienne de $r_k d$ par b :

$$r_{k+1}d = q_k b + r_k \text{ avec } 0 \leq r_k < b.$$

3.22 Proposition (division)**.** *Soient* $r \in \mathbb{N}$*,* $b \in \mathbb{N}^*$ *et* $r < b$*. Alors* $\left(\frac{r}{b}\right)_k^{\langle d\rangle} = 0$ *pour* $k \geq 0$ *et* $\left(\frac{r}{b}\right)_k^{\langle d\rangle} = q_k$ *(défini par la procédure ci-dessus) pour* $k < 0$*.*

3.23 Théorème. *Un nombre est* x *rationnel si et seulement si son développement en base* d *est périodique à partir d'un certain rang : il existe* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $t \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $x_{k-it}^{\langle d\rangle} = x_k^{\langle d\rangle}$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *et* $k < n$*.*

4 Dénombrabilité

4.1 Définition (ensemble fini)**.** Un ensemble E est *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E avec $\{1, \ldots, n\}$ (à interprêter comme l'ensemble vide si $n = 0$). On dit alors que E est de cardinal n.

4.2 Définition (ensemble dénombrable)**.** Un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection de cet ensemble vers $\mathbb{N}$. On dit alors que E est de cardinal $\aleph_0$. Un ensemble est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

4.3 Lemme. *Un ensemble fini n'est pas dénombrable. Un ensemble (qui contient un ensemble) dénombrable n'est pas fini.*

4.4 Lemme. *Soit E un ensemble. S'il existe un application injective de E vers $\mathbb{N}$ (resp. surjective de $\mathbb{N}$ vers E), alors E est au plus dénombrable. Il est alors dénombrable si et seulement si l'image de E dans $\mathbb{N}$ n'est pas bornée.*

4.5 Lemme. *Si $E = E_1 \bigcup E_2$, alors E est fini (resp. au plus dénombrable) si et seulement si E_1 et E_2 le sont. En particulier, tout sous-ensemble d'un ensemble fini (resp. au plus dénombrable) est fini (resp. au plus dénombrable).*

4.6 Lemme. *L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

4.7 Lemme. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si E est fini (resp. dénombrable), alors E^n est fini (resp. dénombrable).*

4.8 Proposition. *Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

4.9 Proposition (procédé diagonal de Cantor)**.** *Si E est dénombrable, alors $\mathcal{P}(E)$ ne l'est pas (et n'est pas fini non plus).*

4.10 Corollaire. *Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des développements en base d n'est pas dénombrable.*

4.11 Théorème. *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

4.12 Corollaire. *Un intervalle de longueur non nulle n'est pas dénombrable.*

5 Nombres algébriques

5.1 Définition (nombre algébrique et nombre transcendant)**.** On dit qu'un nombre réel (resp. complexe) est algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On dit qu'il est transcendant dans le cas contraire.

5.2 Exemple. Tout rationnel est algébrique, car si $q \in \mathbb{Q}$, il est racine de $X - q \in \mathbb{Q}[X]$. Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (argument usuel), mais il est algébrique, puisque racine de $X^2 - 2$.

5.3 Proposition. *L'ensemble des nombres algébriques est dense dans $\mathbb{R}$ et dénombrable.*

5.4 Proposition. *L'ensemble des nombres transcendants est dense dans $\mathbb{R}$ et non dénombrable (et infini, bien entendu).*

6 Nombres transcendants

6.1 e

6.1 Théorème (Hermite, 1873)**.** *Le nombre $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est transcendant.*

6.2 π

6.2 Théorème (Lindenmann, 1882)**.** *Le nombre π (le plus petit zéro strictement positif de la fonction $\sin$) est transcendant.*