UNIVERSITÉ D'ARTOIS — ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015-2016
FACULTÉ DES SCIENCES JEAN PERRIN — LICENCE 3 MATHS

CALCUL DIFFÉRENTIEL 2

FICHE 1: INVERSION LOCALE ET FONCTIONS IMPLICITES

Exercice 1. Le but de l'exercice est de déterminer les points de $\mathbb{C}$ où le polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ n'est pas localement inversible.

(1) Montrer qu'une fonction f dérivable au sens complexe en un point z_0 (i.e. le taux de variation pris dans $\mathbb{C}$ admet une limite notée $f'(z_0)$) est différentiable en ce point quand on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, et que sa différentielle est la multiplication par $f'(z_0)$.
(2) En déduire qu'en un point z_0 où P n'est pas localement inversible, on doit avoir $P'(z_0) = 0$.
(3) Montrer réciproquement que si $P'(z_0) = 0$, alors P n'est pas localement inversible en z_0. On pourra pour cela se ramener au cas où $z_0 = 0$ et où z_0 est racine d'ordre au moins 2.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est injective en un point ressemble (en un sens à préciser), au voisinage de ce point, à une inclusion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ des premières coordonnées.

Soit $f : X \to Y$ une application $\mathcal{C}^1$, où X (resp. Y) est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$). Soit $p \in X$. Montrer l'équivalence des trois points suivants:

(1) $Df(p)$ est injective.
(2) Il existe des voisinages ouverts U de p, V de $f(p)$ et W de $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ ainsi qu'un difféomorphisme $\psi : U \times W \to V$ tels que $\psi \circ \iota = f_{|U}$ où ι est l'inclusion $U \to U \times W$ envoyant u sur $(u, 0)$.
(3) Il existe des voisinages ouverts U de p et V de $f(p)$ ainsi qu'une application $g : V \to U$ tels que $g \circ f_{|U} = \mathrm{id}_U$.

Pour prouver que (1) implique (2), on pourra commencer par se ramener au cas où $f(p) = 0$ et où $\mathrm{im}(Df(p)) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$. Puis, on pourra considérer l'application ψ envoyant (u, w) sur $f(u) + w$, définie sur un voisinage approprié. En quoi cette équivalence justifie-t-elle le mot "ressemble" du but de l'exercice?

Exercice 3. Énoncer et prouver le théorème correspondant à l'exercice précédant dans le cas d'une différentielle surjective.

Exercice 4. Sous l'hypothèse du théorème des fonctions implicites pour la fonction $F : \Lambda \times E \to E'$ en un point (λ, p), calculer la différentielle de la fonction implicitement définie en p, en fonction de la différentielle de F.

Exercice 5. Soit $t \mapsto A(t)$ une fonction $\mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(A(t)) \neq 0$ pour tout t. Soit $t \mapsto B(t)$ une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

(1) Montrer que si A et B sont $\mathcal{C}^1$, l'équation $A(t)V(t) = B(t)$ définit une fonction V également $\mathcal{C}^1$.
(2) Calculer la différentielle de V.

On pourra utiliser le théorème des fonctions implicites.

Exercice 6. Montrer que les polynômes de degré fixé avec n racines distinctes sont ouverts, et que les racines en dépendent continuement.

Exercice 7. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui a n valeurs propres réelles distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage de M sur lequel toute matrice A possède n valeurs propres distinctes, et que ces valeurs propres dépendent continuement de A.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2, xyz - 1)$, et soit (x_0, y_0, z_0) tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrer que (y, z) est implicitement défini comme fonction de x au voisinage de (x_0, y_0, z_0).

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$, et soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 - xy^3 - y^2z + z^3 = 0$.

(1) Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $(1, 1, 1)$.
(2) Vérifier qu'au voisiange de ce point, la surface est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x, y)$ où ϕ est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 10. On considère le système d'équations (non linéaire)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^4 + y^3 + z^4 + t^2 = 0 \\ x^3 + y^2 + z^2 + t = 0 \\ x + y + z + t = 0. \end{pmatrix} \right.$$

Montrer qu'au voisinage de $(0, -1, 1, 0)$, ce système définit une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage de 0 vers $\mathbb{R}^3$, telle que (x, y, z, t) est solution du système si et seulemen si $\phi(t) = (x, y, z)$. Calculer sa dérivée en 0.