FONCTIONS IMPLICITES, INVERSION LOCALE ET ESPACES TANGENTS

Résumé de cours de calcul différentiel 2 L3 de B. Calmès, Université d'Artois
(version du 31 janvier 2016)

Dans ce cours, tous les espaces vectoriels sont sur $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite). De plus, un *evn* désignera toujours un espace vectoriel normé *de dimension finie*. Toutes les normes d'espaces vectoriels y sont alors équivalentes, définissent donc la même topologie, et l'espace est automatiquement *complet* pour cette topologie.[1]

1. Différentielles

Rappelons brièvement le cadre et les notations concernant les applications différentiables. Soient E et E' des evn, et soient $\Omega \subset E$ et $\Omega' \subset E'$ des ouverts.

Lorsqu'une application $f : \Omega \to \Omega'$ est différentiable en un point $p \in \Omega$, on note $Df(p)$ sa différentielle. C'est par définition une application linéaire de E vers E'. Ainsi, lorsque f est différentiable en tout point de Ω, l'application $p \mapsto Df(p)$ définit un nouvelle application $E \to \mathcal{L}(E, E')$.

Lorsque $E' = \mathbb{R}^m$, l'application f est caractérisée par ses m composantes $f_1, \dots f_m$, allant chacune de E vers $\mathbb{R}$, et elle est différentiable (resp. $\mathcal{C}^1$) si et seulement si de ses composantes l'est. La différentielle $Df(p) : E \to \mathbb{R}^m$ est alors donné par ses m composantes $(Df_i(p))_{i=1,\dots,m}$. Lorsque de plus $E = \mathbb{R}^n$, alors on peut considérer chaque f_i comme une application à n variables $x_1, \dots, x_n$. On note alors, si elle existe, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$ la dérivée partielle de f_i par rapport à la variable x_j, en p. Lorsqu'on veut éviter de nommer les variables, on utilise également la notation $\partial_j f_i$.

Si f est différentiable en p, elle admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en p, et sa différentielle $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a pour matrice $(\partial f_i / \partial x_j)_{i,j}$. La réciproque n'est pas vraie ; rappelons toutefois le théorème fort utile en pratique :

1.1. **Théorème.** *L'application f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si elle admet des dérivées partielles en tout point p de Ω, et que ces dérivées partielles sont continues.*

2. Inversion locale

Soient E et E' des evn, et soient $\Omega \subset E$ et $\Omega' \subset E'$ des ouverts.

2.1. **Définition.** On dit qu'une application $f : \Omega \to \Omega'$ est un difféomorphisme si elle est $\mathcal{C}^1$, bijective et que ça réciproque est $\mathcal{C}^1$. En d'autres termes elle est inversible pour la composition parmi les applications $\mathcal{C}^1$.

2.2. **Définition.** On dit qu'une application $f : \Omega \to \Omega'$ est un difféomorphisme local en un point $p \in \Omega$ s'il existe un ouvert $U \subset \Omega$ contenant p tel que $f(U)$ est ouvert et $f_{|U} : U \to f(U)$ est un difféomorphisme.

---

1. Il eut été possible de considérer la plus grande généralité des espaces vectoriels normés complets non nécessairement de dimension finie, mais cela entraine une plus grande technicité des preuves et des énoncés, avec le risque d'y noyer les idées importantes.

2.3. **Théorème** (inversion locale). *Soit $f : \Omega \to \Omega'$ une application $\mathcal{C}^1$ et soit $p \in \Omega$. Si $Df(p) : E \to E'$ est inversible, alors f est un difféomorphisme local au point p.*

Ce théorème a de nombreux corollaires ; en voici deux qui sont assez utiles.

2.4. **Théorème** (application ouverte). *Une application $f : \Omega \to \Omega'$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $Df(u)$ est inversible pour tout $u \in \Omega$ est* ouverte *(l'image de tout ouvert est ouvert).*

2.5. **Théorème** (inversion globale). *Une application injective $f : \Omega \to \Omega'$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $Df(u)$ est inversible pour tout $u \in \Omega$ est un difféomorphisme vers son image.*

3. Fonctions implicites

Soit Λ un troisième evn, en plus de E et E'.

3.1. **Théorème.** *Soit $F : \Lambda \times E \to E'$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point (λ, u). Soit $F_\lambda : E \to E'$ la fonction $u \mapsto F(\lambda, u)$. Si $DF_\lambda(u) : E \to E'$ est inversible, alors F définit implicitement u comme fonction $\mathcal{C}^1$ de λ sur un voisinage de (λ, u).*

4. Paramétrages de sous-variétés

4.1. **Définition** (immersion). Une application $f : \Omega \to \Omega'$ qui est $\mathcal{C}^1$ en $x \in \Omega$ et telle que $Df(x)$ est injective est appelée une *immersion en x*. Si c'est le cas pour tout $x \in \Omega$, on dit que f est une immersion (tout court). Le *support* de f désigne alors l'image de f.

La donnée d'une telle application est une manière de paramétrer son support : le point de $x \in \Omega$ est le paramètre, et son image $f(x)$ dépend donc de ce paramètre. Nous étudierons plus en détails les cas où $E = \mathbb{R}$ (courbe paramétrée) et où $E = \mathbb{R}^2$ (surface paramétrée).

4.2. **Théorème.** *Si f est une immersion en x, il existe un voisinage ouvert U de x, un voisinage ouvert V de $f(x)$, un voisinage ouvert W de $\{0\} \in \mathbb{R}^{\dim(E')-\dim(E)}$ ainsi qu'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\psi : U \times W \to V$ tel que $\psi \circ \iota = f$, où ι est l'inclusion $U \to U \times W$, envoyant u sur $(u, 0)$.*

4.3. **Définition.** Deux immersions $f_1 : \Omega_1 \to E'$ et $f_2 : \Omega_2 \to E'$ sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ tel que $f_2 \circ \phi = f_1$. Un tel ϕ est appelé *changement de paramètre*.

Il est évident que deux immersions équivalentes ont même support. Par contre, deux immersions ayant même support ne sont pas forcément équivalentes.

4.4. **Définition.** Si $x_1 \in \Omega_1$ et $x_2 \in \Omega_2$ tels que $f_1(x_1) = f_2(x_2)$. On dit que (f_1, x_1) et (f_2, x_2) sont localement équivalentes s'il existe des voisinages ouverts U_1 de x_1 et U_2 de x_2 et que $(f_1)_{|U_1}$ et $(f_2)_{|U_2}$ sont équivalentes par un changement de paramètre envoyant x_1 sur x_2.

4.5. **Définition** (espace tangent). L'*espace tangent* en $x \in \Omega$ à une immersion $f : \Omega \to \Omega'$ est le sous-espace affine de E' passant par $f(x)$ et d'espace vectoriel sous-jacent $\mathrm{im} Df(x)$.

On voit que l'espace tangent ne change pas lorsqu'on effectue un changement de paramètre (par composition des différentielles). Le théorème 4.2 dit alors de manière imagée que localement, le support d'une immersion ressemble à son espace tangent.

4.6. **Proposition.** *Soient $f_1 : \Omega_1 \to E'$ et $f_2 : \Omega_2 \to E'$ des immersions respectivement en x_1 et x_2. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) On peut remplacer (f_1, x_1) (resp. (f_2, x_2)) par une application localement équivalente $(\tilde{f}_1, 0)$ (resp. $(\tilde{f}_2, 0)$) de manière à avoir $\tilde{f}_1(h) - \tilde{f}_2(h) = o(\|h\|)$.

(2) L'espace tangent à f_1 en x_1 est identique à l'espace tangent à f_2 en x_2.

La condition (1) est souvent exprimée en disant que f_1 et f_2 ont un *contact d'ordre* ≥ 1 en $f_1(x_1) = f_2(x_2)$. Un contact d'ordre ≥ 0 veut simplement dire que $f_1(x_1) = f_2(x_2)$.

4.7. **Corollaire.** *Soit $f : \Omega \to E'$ une immersion en x. Si un sous-espace affine de E' est paramétré par une immersion affine $a : E \to E'$ telle que $f(x+h) - a(x+h) = o(h)$, alors l'espace tangent à f en x est $a(E)$.*

4.8. **Exemple.** Si on considère une applcation polynômiale $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire que $p(t_1, \ldots, t_n)$ est donné par ses m coordonnées $x_1, \ldots, x_m$ qui sont toutes des polynômes en les t_i. Alors elle est évidemment $\mathcal{C}^1$, et sa différentielle en $(0, \ldots, 0)$ est donnée par la partie linéaire (retirer les termes constants et les termes de degré ≥ 2). Si elle est injective, on a bien une immersion, et son espace tangent est donc paramétré par cette partie linéaire.

4.9. **Définition** (submersion)**.** Une application $f : \Omega \to \Omega'$ qui est $\mathcal{C}^1$ en $x \in \Omega$ et telle que $Df(x)$ est surjective est appelée une *submersion en x*. Si c'est le cas pour tout $x \in \Omega$, on dit que f est une submersion (tout court).

4.10. **Théorème.** *Si f est une submersion en x, il existe un voisinage ouvert U de x, un voisinage ouvert V de $f(x)$, un voisinage ouvert W de $\{0\} \in \mathbb{R}^{\dim(E) - \dim(E')}$ ainsi qu'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\psi : U \to V \times W$ tel que $p \circ \psi = f$, où p est la projection $V \times W \to V$, envoyant (v, w) sur w.*

4.11. **Théorème.** *Soit $f : \Omega \to E'$, $y \in E'$, et considérons le fermé $C = f^{-1}(y)$. Soit $c \in C$ tel que $Df(c) : E \to E'$ est surjective. Alors au voisinage de c dans Ω, il existe une immersion d'image C et l'espace tangent à C en c est le sous-espace affine passant par c et de direction* $\ker Df(c)$.