COURBES PARAMÉTRÉES

Résumé de cours de calcul différentiel 2 L3 de B. Calmès, Université d'Artois
(version du 6 mars 2016)

Dans ce qui suit, un espace vectoriel de dimension finie est toujours muni de la topologie induite par n'importe quelle norme d'espace vectoriel dessus. Lorsqu'on a besoin d'une norme spécifique sur $\mathbb{R}^n$, il s'agit toujours de la norme euclidienne, sauf mention contraire.

Un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme est une bijection $\mathcal{C}^k$ dont l'inverse est $\mathcal{C}^k$; lorsque $k = 0$, il s'agit simplement d'un homéomorphisme, i.e. une bijection continue d'inverse continue.

1. Paramétrage

1.1. **Définition.** On appelle *courbe paramétrée* dans $\mathbb{R}^n$ est une application continue $f : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Le *support* de la courbe est l'image de f dans $\mathbb{R}^n$. La i-ème coordonnée ($1 \leq i \leq n$) est l'application continue $f_i = p_i \circ f : U \to \mathbb{R}$ où $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la projection sur la i-ème coordonnée. Enfin, si $n = 2$, on parle de courbe *plane*.

1.2. *Remarque.* L'intervalle I peut-être ouvert, comme $]a, b[$ ou $\mathbb{R}$, fermé, comme $[a, b]$ ou $\mathbb{R}$, ou ni l'un ni l'autre, comme $[a, b[$. Remarquons simplement que les propriétés locales (tangence, différentiation) se définissent plutôt sur un ouvert, et les propriétés dépendant de mesures (longueur) se définissent plus simplement sur un fermé compact. Nous passerons donc d'une situation à l'autre selon l'aspect étudié. Enfin, il peut arriver que l'on veuille définir une courbe sur autre chose qu'un unique intervalle, par exemple sur $\mathbb{R}^*$, qui est une union de deux intervalles ouvert. L'extension des concepts abordés à cette généralité ne pose pas de problème, et nous nous limitons au cas d'un seul intervalle par souci de simplicité, plutôt que par nécessité.

1.3. *Remarque.* Il est commun de définir f en utilisant une variable $t \in I$, considérée comme représentant le temps. On parle alors du point $f(t)$ *en un temps* t donné. Deux courbes paramétrées peuvent avoir le même support, sans qu'il soit parcouru de la même manière comme par exemple les courbes $f(t) = (t, t)$ et $f(t) = (t^3, t^3)$, dont le support est la droite diagonale de $\mathbb{R}^2$.

Lorsque qu'une courbe paramétrée est donnée par une application f qui est $\mathcal{C}^k$ pour un certain $k \geq 0$, on parle de courbe paramétrée $\mathcal{C}^k$ (d'après notre définition, toute courbe paramétrée est $\mathcal{C}^0$). Bien entendu, c'est le cas si et seulement si chacune des coordonnées f_i est k-fois dérivable et de dérivée k-ième continue. Par convention, si l'intervalle est fermé, nous dirons que la courbe est $\mathcal{C}^k$ si elle est $\mathcal{C}^k$ sur l'intérieur de I et si elle admet des dérivées k-ièmes aux bornes, à droite ou à gauche selon le cas.

Bien entendu, la différentielle d'une courbe en un point t (lorsqu'elle existe) est l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par la matrice colonne

$$f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}.$$

1.4. **Définition.** Une courbe paramétrée $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite *simple* si f est injective.

1.5. **Définition.** Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : J \to \mathbb{R}^n$ sont deux courbes paramétrées, on dit qu'elles sont *équivalentes* (resp. $\mathcal{C}^k$*-équivalentes*) s'il existe un homéomorphisme (resp. un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme) $\sigma : I \to J$ tel que $g \circ \sigma = f$. Un tel σ est alors appelé un *changement de paramètre.*

Il est évident que deux courbes paramétrées équivalentes ont même support, que l'une est simple si l'autre l'est, et si elles sont $\mathcal{C}^k$-équivalentes, l'une est $\mathcal{C}^k$ si l'autre l'est, etc.

2. Longueur et abscisse curviligne

La norme considérée sur $\mathbb{R}^n$ est toujours la norme euclidienne.

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et soit $\Sigma = (t_1 < \cdots < t_{k+1})$ une subdivision de I (donc $t_i \in I$ pour tout i). On considère la longueur totale des segments

$$\mathrm{L}(f, \Sigma) = \sum_{i=0}^{k} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|$$

2.1. **Définition.** On dit que la courbe f est *rectifiable* si

$$\mathrm{L}(f) = \sup_{\Sigma}(\mathrm{L}(f, \Sigma)) < +\infty$$

où Σ parcourt toutes les subdivisions de I. Dans ce cas, ce nombre est appelé la *longueur* de la courbe.

2.2. *Remarque.* Si $I = [a, b]$, on peut ne considérer que des subdivisions pour lesquelles $t_0 = a$ et $t_{k+1} = b$.

2.3. **Proposition.** *Si deux courbes sont équivalentes, alors l'une est rectifiable si et seulement si l'autre l'est, et elles ont alors même longueur.*

2.4. **Théorème.** *Si I est fermé et si la courbe paramétrée est $\mathcal{C}^1$, alors elle est rectifiable et sa longueur vaut*

$$\mathrm{L}(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

2.5. **Définition.** Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ vérifie que pour tous a, b dans I, on a $\mathrm{L}(f_{|[a,b]}) = |b - a|$, alors on dit que la courbe est *paramétrée par longueur d'arc.*

2.6. **Proposition.** *Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$, alors elle est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si $\|f'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$.*

2.7. **Définition.** Étant donné une courbe $\mathcal{C}^1$ et un point $t_0 \in I$, on définit $s : I \to \mathbb{R}$ l'*abscisse curviligne d'origine* t_0 par

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(x)\| dx.$$

On voit immédiatement que s est dérivable sur I et que

$$s'(t) = \|f'(t)\|. \tag{2.1}$$

De plus, si f est deux fois différentiable en t et $\|f'(t)\| \neq 0$, alors

$$s''(t) = \frac{f'(t) \cdot f''(t)}{\|f'(t)\|} \tag{2.2}$$

(produit scalaire au numérateur).

2.8. **Proposition.** *Soit f une courbe régulière. Alors il existe une courbe $\mathcal{C}^1$-équivalente à f qui est paramétrée par longueur d'arc.*

3. Tangente

Pour s'intéresser au comportement local d'une courbe paramétrée au voisinage d'un point, plusieurs concepts sont utiles. Le plus simple est celui de *tangente*, qui consiste à approximer le support de la courbe par une droite. Comme c'est uniquement le comportement local qui nous intéresse, on supposera la courbe définie sur un intervalle *ouvert* de I de $\mathbb{R}$.

3.1. **Définition.** Soit $t \in I$. S'il existe une fonction $\lambda : U \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage ouvert U de t telle que

$$\lim_{x \to t} \lambda(x)(f(x) - f(t)) = v \neq 0$$

(i.e. existe et est un vecteur *non nul* $v \in \mathbb{R}^n$), on dit que la courbe paramétrée admet pour tangente en t la droite passant par $f(t)$ et de direction portée par v.

Cette définition est justifiée par le lemme suivant :

3.2. **Lemme.** *Soient deux fonctions λ et μ produisant des vecteurs limites u et v dans la définition précédente. Alors u et v sont colinéaires.*

3.3. **Définition.** La courbe paramétrée f est dite *régulière en* $t \in I$ si elle est $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de t et si $f'(t) \neq 0$. Elle est dite *régulière* elle est régulière en tout $t \in I$.

3.4. **Proposition.** *Soit $f : I \to E$ une courbe paramétrée différentiable en t et telle que $f'(t)$ est non nulle. Alors $Df(t)$ est injective, de rang 1. De plus, la courbe admet une tangente en t au sens de la définition 3.1 et cette tangente est la droite passant par $f(t)$ et de direction portée par $f'(t)$.*

3.5. **Corollaire.** *Pour une courbe régulière en un point, la tangente coïncide avec l'espace tangent au sens de la définition 4.5 du résumé 1.*

3.6. **Définition.** Lorsque la courbe f est différentiable en un temps t, de différentielle $f'(t)$, on appelle souvent cette différentielle *application tangente*.

Plus généralement :

3.7. **Proposition.** *Soit $f : I \to E$ une courbe paramétrée $\mathcal{C}^k$ au voisinage de t, telle que $f^{(i)}(t) = 0$ pour $i = 0, \dots, k$. Supposons de plus que $f^{(k+1)}(t)$ existe et est non nulle. Alors $D^{k+1}f(t)$ est injective, de rang 1, et f admet une tangente en t au sens de la définition 3.1, qui est la droite passant par $f(t)$ et de direction $f^{(k+1)}(t)$).*

3.8. *Remarque.* Si la différentielle n'existe pas, alors, tout peut arriver. Regarder la courbe $(t, \sqrt{|t|})$. Montrer qu'elle n'est pas différentiable en 0 (pas de dérivée partielle). Pourtant il y a une tangente au sens du dessus.

Par application du théorème 4.2 du résumé 1 on a :

3.9. **Proposition.** *Sous les hypothèses de la proposition 3.4, en supposant de plus que f est $\mathcal{C}^k$ $k \geq 1$ en t, il existe un voisinage ouvert U de t, un voisinage ouvert V de $f(t)$, un voisinage ouvert W de $\{0\} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ainsi qu'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\psi : U \times W \to V$ tel que $\psi \circ \iota = f$, où ι est l'inclusion $U \to U \times W$, envoyant u sur $(u, 0)$.*

Dit de manière imagée, une courbe ressemble à sa tangente.

3.10. **Corollaire.** *Si la courbe f est régulière en un point $t \in I$, alors il existe un voisinage ouvert U de t tel que la restriction de la courbe à U est simple.*

4. Normale, courbure et repère de Frenet

4.1. **Définition.** Lorsqu'une courbe $f : I \to \mathbb{R}^n$ admet une tangente en $t \in I$, le sous-espace affine orthogonal (au sens du produit scalaire euclidien) à cette tangente, et passant par $f(t)$ est appelé *sous-espace normal* à la courbe en t. S'il est de dimension 1 (courbe à valeurs dans $\mathbb{R}^2$), alors on parle de *droite normale*.

Supposons maintenant la courbre $f : I \to \mathbb{R}^n$ paramétrée par longueur d'arc ; on appellera le paramètre s plutôt que t pour s'en souvenir.

4.2. **Proposition.** *Si la courbe est deux fois différentiable en $s \in I$, alors*

(1) le vecteur $f''(s)$ est orthogonal au vecteur tangent $f'(s)$, il se trouve donc dans le sous-espace normal.

(2) Si $f''(s)$ est non nul, et que la courbe est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, alors $(f'(s), f''(s))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, où $f'(s)$ engendre la tangente, et $f''(s)$ engendre la normale.

4.3. **Définition** (courbure d'une courbe plane)**.** Dans le cas où f est une courbe plane deux fois différentiable en s, paramétrée par longueur d'arc, on définit sa *courbure algébrique* en s par

$$\bar{\rho}(s) = \det(f'(s), f''(s)).$$

La *courbure* (tout court) est $\rho(s) = |\bar{\rho}(s)|$.

Bien entendu, la courbure algébrique $\bar{\rho}$ peut être négative, mais pas la courbure ρ.

Soit $\tau(s) = f'(s)$, et soit $\nu(s)$ le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ faisant un angle de $+\pi/2$ avec $\tau(s)$. En d'autres termes,

$$\tau(s) = \begin{pmatrix} f_1'(s) \\ f_2'(s) \end{pmatrix}, \qquad \nu(s) = \begin{pmatrix} -f_2'(s) \\ f_1'(s) \end{pmatrix}$$

et ces vecteurs sont unitaires.

4.4. **Proposition.** *On a les relations*

$$\tau'(s) = \bar{\rho}(s)\nu(s), \quad \nu'(s) = -\bar{\rho}(s)\tau(s) \quad \textit{et} \quad \|f''(s)\| = |\bar{\rho}(s)| = \rho(s)$$

En présence d'une courbe régulière qui n'est pas paramétrée par longueur d'arc, mais qui est $\mathcal{C}^2$ au point considéré, on s'y ramène par changement de variable $\mathcal{C}^2$ en posant $s(t)$ avec $s'(t) = \|f'(t)\|$ pour définir la courbure, qui est alors donnée par :

$$\tau(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}, \quad \tau'(t) = \bar{\rho}(t)\|f'(t)\|\nu(t).$$

Un changement de variable décroissant changera le signe de la courbure algébrique.

On peut vouloir exprimer directement les vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, et la courbure en fonction de ceux-ci :

4.5. **Proposition.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe $\mathcal{C}^2$ régulière. Alors*

$$f'(t) = \|f'(t)\|\tau(t), \quad f''(t) = \left(\frac{f'(t) \cdot f''(t)}{\|f'(t)\|}\right)\tau(t) + \bar{\rho}(t)\|f'(t)\|^2\nu(t)$$

et

$$\bar{\rho}(t) = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3}.$$

4.6. **Définition.** Toujours lorsque $f : U \to \mathbb{R}^2$ est régulière et $\mathcal{C}^2$ en t, avec $f''(t) \neq 0$, on définit le cercle *osculateur* à f en t comme le cercle de rayon $1/\rho(t)$ et de centre en $f(t) + (1/\bar{\rho}(t))\nu(t)$.

4.7. **Proposition.** *Quand il est défini, le cercle osculateur est l'unique cercle qui a un contact d'ordre au moins* 2 *(voir 4.6) avec la courbe.*

Dans le cas d'une courbe paramétrée régulière dans $\mathbb{R}^3$, on peut toujours considérer le vecteur $\tau(s) = f'(s)$, mais on ne peut pas définir le vecteur $\nu(s)$ par l'angle *algébrique* qu'il fait avec, ça n'a pas de sens. Par contre, si $f''(s)$ existe et est non nul, on dispose toujours d'un vecteur orthogonal à $\tau(s)$, par le point (1) de la proposition 4.2. On pose donc dans ce cas

4.8. **Définition** (repère de Frenet dans l'espace)**.** Pour une courbe $f : I \to \mathbb{R}^3$ paramétrée par longueur d'arc, deux fois différentiable en s et telle que $f''(s) \neq 0$, le repère de Frenet en s est le repère orthonormé direct

$$\tau(s) = f'(s), \quad \nu(s) = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|} \quad \text{et} \quad \beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s).$$

La droite passant par $f(s)$ et de direction $\nu(s)$ (resp. $\beta(s)$) est appelée *normale principale* (resp. *binormale*).

Notons qu'on a donc

$$\|\tau(s)\| = \|\nu(s)\| = \|\beta(s)\| = 1 \quad \text{et} \quad \tau(s)\cdot\nu(s) = \nu(s)\cdot\beta(s) = \beta(s)\cdot\tau(s) = 0. \tag{4.1}$$

4.9. **Définition** (courbure et torsion)**.** On définit la *courbure* $\rho(s) = \tau'(s) \cdot \nu(s)$ et si f est 3-fois différentiable en s, la *torsion* $\theta(s) = \beta'(s) \cdot \nu(s)$.

4.10. **Proposition.** *Si f est 3-fois différentiable en s,*

$$\tau'(s) = \rho(s)\nu(s), \quad \nu'(s) = -\rho(s)\tau(s) - \theta(s)\beta(s) \quad \textit{et} \quad \beta'(s) = \theta(s)\nu(s). \tag{4.2}$$

Sous forme matricielle, les équations (4.2) de la proposition donnent

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\tau(s)\\ \nu(s)\\ \beta(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \rho(s) & 0\\ -\rho(s) & 0 & -\theta(s)\\ 0 & \theta(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau(s)\\ \nu(s)\\ \beta(s)\end{pmatrix}.$$

4.11. *Remarque.* Par définition de $\nu(s)$, on a $\rho(s) > 0$, alors que $\theta(s)$ est quelconque. Il est facile de voir que si f est $\mathcal{C}^k$, $k \geq 3$, alors ρ, ν et β sont $\mathcal{C}^{k-2}$ et θ est $\mathcal{C}^{k-3}$.

De même que dans le plan, lorsque le paramétrage est quelconque et que la courbe est $\mathcal{C}^2$, on se ramène par changement de variable $s(t)$ avec $s'(t) = \|f'(t)\|$ à un paramétrage par longueur d'arc pour définir le repère de Frenet, la courbure et la torsion, qui sont donc définis par :

$$\tau(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}, \quad \tau'(t) = \rho(t)\|f'(t)\|\nu(t),$$

$$\nu'(t) = -\rho(t)\|f'(t)\|\tau(t) - \theta(t)\|f'(t)\|\beta(t), \quad \text{et} \quad \beta'(t) = \theta(t)\|f'(t)\|\nu(t).$$

où $\rho(t) > 0$. Autrement dit :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tau(t)\\ \nu(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}=\|f'(t)\|\begin{pmatrix}0 & \rho(t) & 0\\ -\rho(t) & 0 & -\theta(t)\\ 0 & \theta(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau(t)\\ \nu(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}.$$

Lorsqu'on exprime directement la courbure et la torsion en fonction des dérivées de f, on trouve :

4.12. **Proposition.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe $\mathcal{C}^3$ régulière en t, et telle que $f''(t) \neq 0$. Alors*

$$f'(t) = \|f'(t)\|\tau(t), \quad f''(t) = \left(\frac{f'(t)\cdot f''(t)}{\|f'(t)\|}\right)\tau(t) + \rho(t)\|f'(t)\|^2\nu(t)$$

$$\rho(t) = \frac{\|f'(t)\wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3} \quad \textit{et} \quad \theta(t) = -\frac{\det(f'(t), f''(t), f'''(t))}{\|f'(t)\wedge f''(t)\|^2}$$