SURFACES PARAMÉTRÉES

Résumé de cours de calcul différentiel 2 L3 de B. Calmès, Université d'Artois
(version du 20 mars 2016)

Il est possible de paramétrer des surfaces à partir de domaines variés dans $\mathbb{R}^2$, ouverts, fermés, ni l'un ni l'autre, etc. mais il faut garder à l'esprit que les sous-ensembles quelconques de $\mathbb{R}^2$ sont topologiquement beaucoup plus compliqués que ceux de $\mathbb{R}$, et certains (comme une droite) sont vraiment trop dégénérés pour paramétrer des surfaces. Toutefois, comme nous nous intéressons ici en premier lieux aux propriétés locales, nous supposerons que notre domaine de définition est soit un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$.

1. Surfaces paramétrées

Dans ce qui suit, U désigne un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$.

1.1. **Définition.** Une *surface paramétrée* est une application continue $F : U \to \mathbb{R}^n$. Son *support* est l'image de f.

On parle de surface paramétrée $\mathcal{C}^k$ si l'application F est $\mathcal{C}^k$, ce qui est le cas exactement si les n-applications coordonnées $F_i : U \to R$ sont $\mathcal{C}^k$.

1.2. **Définition.** La surface paramétrée est dite *simple* si F est injective.

1.3. **Définition.** La surface paramétrée est dite *régulière* en (u, v) si elle est $\mathcal{C}^1$ en (u, v) et si sa différentielle $DF(u, v)$ est de rang 2 (i.e. injective).

C'est bien entendu équivalent à ce que les deux dérivées partielles $\partial_1 F$ et $\partial_2 F$ soient continues sur un voisinage ouvert de (u, v) et à ce que les vecteurs $\partial_1 F(u, v)$ et $\partial_2 F(u, v)$ soient linéairement indépendants.

1.4. **Définition.** Deux surfaces paramétrées $F : U \to \mathbb{R}^n$ et $G : V \to \mathbb{R}^n$ sont dites *équivalentes* (resp. $\mathcal{C}^k$-équivalentes) s'il existe un homéomorphisme (resp. un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme) $\psi : U \to V$ tel que $G = F \circ \psi$.

Comme dans le cas des courbes, deux surfaces équivalentes ont même support, l'une est simple si l'autre l'est, et si elles sont $\mathcal{C}^k$-équivalentes, l'une est $\mathcal{C}^k$ si l'autre l'est, etc.

2. Espace tangent

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $F : U \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable en $x \in U$.

2.1. **Définition.** On dit qu'elle est *régulière* en x si c'est une immersion en x.

2.2. **Définition** (espace tangent)**.** Pour une surface paramétrée différentiable en (u, v), on définit son espace tangent comme le sous-espace affine passant par le point $F(u, v)$ et d'espace vectoriel sous-jacent $\mathrm{im}(DF(u, v))$. Il est donc de dimension au plus 2, et exactement 2 lorsque la surface est régulière en (u, v).

Lorsque la surface n'est pas différentiable en (u, v), la notion d'espace tangent n'est pas aussi claire et il y a plusieurs définitions possibles selon le point de vue qu'on adopte (ordre de contact, ensemble des tangentes au courbes passant par le point, etc.). Nous ne nous aventurerons pas dans cette direction.

2.3. **Proposition.** *Deux surfaces paramétrées $\mathcal{C}^1$-équivalentes ont même espace tangent.*

Le corollaire 4.7 du résumé 1 nous dit que pour une surface paramétrée régulière, le plan tangent en un point se caractérise par une propriété de contact.

Par ailleurs, puisque dans $\mathbb{R}^3$, un plan engendré par deux vecteurs a et b est l'ensemble des vecteurs x tels que $(a \wedge b) \cdot x = 0$, ce qui fournit une équation cartésienne, on a :

2.4. **Proposition.** *Le plan tangent à une surface paramétrée régulière F en (u, v) est donné par l'équation*

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - F(u,v)\right) \cdot \left(\tfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) \wedge \tfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right) = 0$$

Voici un cas particulier important. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application continue. On considère son *graphe* Γ_f qui est l'ensemble des points de $U \times \mathbb{R}$ de la forme $(u, v, f(u, v))$. C'est une surface paramétrée par $F : U \to \mathbb{R}^3$ envoyant (u, v) $(u, v, f(u, v))$.

2.5. **Proposition.** *Si f est $\mathcal{C}^1$ en un point (u, v), alors F est régulière en (u, v) et l'espace tangent à F en (u, v) est le plan d'équation*

$$z - f(u,v) = (x-u)\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + (y-v)\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$$

2.6. *Remarque.* Notons que lorsque la surface n'est pas paramétrée, mais donnée comme les zéros d'une submersion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, alors le théorème 4.11 du résumé 1 nous fournit une équation du plan tangent.

3. Normale et repère de Darboux

Étant donné une surface paramétrée régulière simple $F : U \to \mathbb{R}^3$, considérons le vecteur

$$h(u,v) = \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|} \quad \text{où} \quad N(u,v) = \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$$

C'est donc un vecteur unitaire normal à la surface, qui engendre la droite normale (i.e. perpendiculaire au plan tangent) à cette surface au point considéré.

3.1. **Lemme.** *La droite normale ne change pas par changement de paramètre $\mathcal{C}^1$ (laissant la surface régulière) et le vecteur h ne change pas non plus si et seulement si le changement de paramètre induit un isomorphisme direct sur les espaces tangents $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*

Par exemple, si on échange le rôle de u et v, le vecteur h change de sens.

U étant connexe, on voit facilement par continuité qu'un changement de variable $U \simeq V$ induit soit en tout point un isomorphisme tangent direct $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$, soit en tout point un isomorphisme non direct (i.e. il ne peut y avoir un point où c'est l'un et un point où c'est l'autre). De manière analogue, le choix d'un sens de la normale en un point induit un choix sur toutes les normales par continuité. Les choix suivants sont donc équivalents :

(1) Un choix d'une classe d'équivalence de paramétrages à changement de variable "direct" près ;

(2) Un choix d'un sens sur la normale en un point donné.

3.2. **Définition.** La donnée d'un tel choix est appelé une *orientation*.

Autant le vecteur normal h est relativement canonique (au sens près), autant le choix d'une base de l'espace tangent est arbitraire. Toutefois, si l'on se donne une courbe régulière f paramétrée par longueur d'arc et qui est sur la surface, alors en tout point $F(u,v) = f(s)$, on peut considérer les trois vecteurs $\tau(s)$, $h(s) = h(u,v)$ et $n(s) = h(s) \wedge \tau(s)$.

3.3. **Définition** (repère de Darboux)**.** Le repère orthonormé direct $(\tau(s), n(s), h(s))$ est appelé *repère de Darboux* associé à f dans F. Le vecteur $n(s)$ est appelé *vecteur normal géodésique.*

Attention, le vecteur normal géodésique est normal à la courbe f, mais tangent à la surface F.

On a donc bien entendu les relations suivantes

$$\tau^2 = n^2 = h^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \tau \cdot n = n \cdot h = h \cdot \tau = 0$$

dont on tire par dérivation lorsque la courbe est $\mathcal{C}^2$

$$\tau \cdot \tau' = n \cdot n' = h \cdot h' = 0 \quad \text{et} \quad \tau \cdot n' + \tau' \cdot n = n \cdot h' + n' \cdot h = h \cdot \tau' + h' \cdot \tau = 0.$$

3.4. **Définition.** On appelle *courbure normale* de f dans F la fonction

$$\rho_n(s) = h(s) \cdot \tau'(s) = -h'(s) \cdot \tau(s),$$

courbure géodésique de f dans F la fonction

$$\rho_g(s) = n(s) \cdot \tau'(s) = -n'(s) \cdot \tau(s),$$

et *torsion géodésique* de f dans F la fonction

$$\theta_g(s) = n(s) \cdot h'(s) = -n'(s) \cdot h(s).$$

3.5. **Proposition.** *On a les formules de Darboux :*

$$\tau'(s) = \rho_g(s)n(s) + \rho_n(s)h(s), \qquad n'(s) = -\rho_g(s)\tau(s) - \theta_g(s)h(s),$$
$$\textit{et} \quad h'(s) = -\rho_n(s)\tau(s) + \theta_g(s)n(s)$$

ou, sous forme matricielle :

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\tau(s)\\ n(s)\\ h(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \rho_g(s) & \rho_n(s)\\ -\rho_g(s) & 0 & -\theta_g(s)\\ -\rho_n(s) & \theta_g(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau(s)\\ \nu(s)\\ \beta(s)\end{pmatrix}.$$

Contrairement au cas du repère de Frenet, il n'y a aucune raison que la composante $\rho_n(s)$ s'annule en général.

3.6. **Définition.** Une courbe f régulière (paramétrée par longueur d'arc) sur la surface F est appelée *géodésique* si sa courbure géodésique ρ_g est nulle en tout point.

Ces courbes ont une importance capitale en mécanique du point parece qu'il y a équivalence entre les deux points suivants :

(1) Une particule se déplace à vitesse constante sur une géodésique de la surface ;

(2) Elle ne subit qu'une accélération normale à la surface.

Si une particule se déplace “sans frotter” sur une surface et sans être soumise à aucune force extérieure, elle suivra donc une géodésique.

Cela revient à ceci :

3.7. **Proposition.** *Pour une courbe f paramétrée par $f(t) = F(u(t), v(t))$, où u et v sont $\mathcal{C}^2$, il y a équivalence entre*

(1) $f''(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(u(t), v(t)) = 0$ *et* $f''(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial v}(u(t), v(t)) = 0$ *;*

(2) f *est une géodésique et* $\|f'(t)\|$ *est constante.*

3.8. *Remarque.* La généralisation de la notion de courbure et de géodésique à d’autres dimensions (ex : 4) permet la formulation de nombreuse situtations en physique. Par exemple la relativité générale affirme qu’une particule (par exemple une particule de lumière, un photon) suit une géodésique de l’espace-temps (de dimension $3 + 1 = 4$).

4. Aire

Soit $F : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière, et soit $D \subset U$ un domaine (mesurable). Alors l’aire de la surface est donné par

$$\int_D \|\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}\| du dv$$

On peut justifier cette formule en vérifiant qu’elle donne le résultat attendu pour les surfaces affines sur des rectangles, qu’elle est additive sur le domaine (équivalent de la relation de Chasles).