ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - PROBLÈME DE CAUCHY

Résumé de cours de calcul différentiel 2 L3 de B. Calmès, Université d'Artois
(version du 18 avril 2016)

Tous les evn considérés sont toujours sur $\mathbb{R}$ et de dimension finie, sauf mention expresse du contraire.

1. Forme générale

Nous allons étudier des équations reliant des fonctions et leurs dérivées successives. Nous imposerons donc que ces fonctions soient définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, de longeur non vide. La raison est premièrement qu'il faut que la continuité et la dérivabilité aient un sens, ce qui contraint à se placer sur une union finie (pour éviter les cas pathologiques) d'intervalles d'intérieur non vide disjoints, et pour une telle union, il suffit de trouver les solutions sur chaque intervalle (composante connexe) la composant pour obtenir les solution sur l'union.

Comme d'habitude, une fonction est dite $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle si elle est $\mathcal{C}^k$ sur son intérieur et si elle est $\mathcal{C}^k$ à gauche ou à droite selon le cas aux bornes.

1.1. **Définition.** Une équation différentielle sur I pour les fonctions $I \to E$, où E est un evn, est la donnée d'une fonction

$$f : U \to E'$$

où U est une partie de $I \times E^{n+1}$ et E' est un autre evn. On dit qu'une fonction $x : I \to E$ est *solution* de cette équation différentielle si ses n dérivées (notées $x^{(i)}$) existent et satisfont à

$$\begin{aligned} (t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in U \quad \forall t \in I \\ f\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\big) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

On dit qu'elle est *d'ordre* n si f n'est pas indépendante de sa dernière variable E.

Quitte à changer E en $F = E^n$ et E' en $F' = E^{n-1} \oplus E'$, on peut toujours se ramener à une équation d'ordre 1. En effet, si $g : I \times (E^n)^2 \to E^{n-1} \oplus E'$ est donnée par ses composantes

$$g_i(t, y, z) = z_i - y_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \text{ et } \quad g_n(t, y, z) = f(t, y_1, \dots, y_n, z_n)$$

alors g est une équation différentielle d'ordre 1 et

$$x \mapsto y = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

réalise une bijection des solutions de l'équation (1.1) vers celles de $g(t, y, y') = 0$ de bijection inverse $y \mapsto y_1$. Il est immédiat de vérifier qu'une solution de l'une est envoyé sur une solution de l'autre.

2. Le problème de Cauchy

Partons d'une équation d'ordre 1

$$g(t, x, x') = 0 \tag{2.1}$$

définie sur I, avec $x : I \to E$.

2.1. **Problème** (de Cauchy)**.** *Étant donné un $t_0 \in I$ et un $v_0 \in E$, existe-t-il une solution x de (2.1) telle que $x(t_0) = v_0$? Et si oui, est-elle unique ?*

En fait, nous n'allons pas répondre au problème en toute généralité, mais tout de même dans une grande généralité. Nous nous contenterons d'une équation de la forme

$$x' = f(t, x) \tag{2.2}$$

c'est-à-dire où la fonction g de (2.1) est de la forme $g(t, x, x') = x' - f(t, x)$, où $f : U \to E$, avec U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.

2.2. *Remarque.* Si $f : U \to E$ est $\mathcal{C}^k$, alors toute solution de (2.2) est $\mathcal{C}^{k+1}$.

2.3. **Définition.** Une telle application $f : U \to E$ est dite :

— *lipschitzienne par rapport à la seconde variable* s'il existe un réel positif K tel que $\forall (t, x) \in U$, on ait

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq K\|y - x\|. \tag{2.3}$$

— *localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable* si tout point de U est contenu dans un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que la fonction $f_{|V}$ est lipschitzienne.

— *lipschitzienne par rapport à la seconde variable, localement par rapport à la première variable*, si le voisinage ouvert V du point précédent peut être choisi de la forme $V = (I \times E) \cap U$ avec I un intervalle ouvert.

2.4. **Lemme.** *Pour que f soit localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable, il suffit que f soit différentiable par rapport à cette variable et que l'application "différentielle" $U \to \mathcal{L}(E)$ donnée par $(t, x) \mapsto D(f_t)(x)$ soit continue.*

On a alors le théorème suivant.

2.5. **Théorème** (Cauchy-Lipschitz)**.** *Étant donné une telle application* continue *$f : U \to E$ localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et un point (t_0, v_0) de U. Alors il existe un intervalle J contenant t_0 dans son intérieur, tel que l'équation différentielle (2.2) admette une solution $x : J \to E$ vérifiant $x(t_0) = v_0$. De plus, sur tout intervalle J contenant t_0, il existe au plus une telle solution.*

2.6. **Lemme.** *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un réel t_0. Pour qu'une fonction continue $x : J \to E$, de graphe inclus dans U, soit solution de (2.2) et vérifie $x(t_0) = v_0 \in E$, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'équation intégrale*

$$x(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du \tag{2.4}$$

pour tout $t \in J$.

2.7. *Remarque.* Une fonction continue solution de (2.4) est automatiquement $\mathcal{C}^1$.

L'unicité affirmée en fin du théorème 2.5 est une conséquence des deux lemmes suivants.

2.8. **Lemme** (de Grönwall)**.** *Soit $\phi : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue sur un interalle I, et soit $t_0 \in I$. Supposons qu'il existe $L, K \geq 0$ tels que*

$$\phi(t) \leq L + K\Big|\int_{t_0}^{t} \phi(u)du\Big| \quad \forall t \in I$$

Alors pour tout $t \in I$, on a $\phi(t) \leq Le^{K|t-t_0|}$. En particulier, si $L = 0$, alors $\phi = 0$.

2.9. **Lemme.** *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 2.5, si x_1 et x_2 sont deux solutions de (2.2) définies sur un même* intervalle J *et si elles coïncident en un point t_0 de J, alors elles sont égales.*

On rappelle le théorème suivant, qui est à la base de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz 2.5.

2.10. **Théorème** (du point fixe)**.** *Soit A un fermé non vide d'un evn complet $\mathcal{E}$ (non nécessairement de dimension finie), et soit $h : A \to A$ une fonction k-lipschitzienne pour un certain $k < 1$. Alors h possède un unique point fixe, et pour tout $x_0 \in A$, la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = h(x_n)$ converge vers ce point fixe.*

Pour la preuve de Cauchy-Lipschitz, on va définir une suite de fonctions

$$x_0(t) = x_0 \quad \text{et} \quad x_{n+1}(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x_n(u))du$$

autrement dit $x_{n+1} = h(x_n)$ où $h : A \to A$ envoie g sur $v_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, g(u))du$. puis on montre par le théorème du point fixe que cette suite converge vers une fonction vérifiant donc 2.4. Le problème est de vérifier les hypothèses de ce théorème sur un fermé A d'un evn complet à définir. Dans un evn, on note $B(a, r)$ (resp. $\bar{B}(a, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) centrée en a et de rayon r. On choisit d'abord un voisinage ouvert V de (t_0, v_0) sur lequel f est K-lipschitzienne, dans lequel on choisit un produit de boules fermées $\bar{B}(t_0, r) \times \bar{B}(v_0, \rho)$ avec $r, \rho > 0$. La fonction f étant continue, elle est bornée sur un tel compact. Soit M un majorant de $\|f\|$. Soit $g : \bar{B}(t_0, r) \to \bar{B}(v_0, \rho)$ une fonction continue. Alors

$$\|h(g)(t) - v_0\| \leq \Big| \int_{t_0}^{t} \|f(u, g(u))\| du \Big| \leq rM$$

Donc quitte à réduire r pour avoir $rM \leq \rho$, on a donc bien défini une fonction $h : A \to A$ où $A = \mathcal{C}^0(\bar{B}(t_0, r), \bar{B}(v_0, \rho))$. Calculons alors

$$\begin{aligned} \|h(g_1)(t) - h(g_2)(t)\| &\leq \Big| \int_{t_0}^{t} \|f(u, g_1(u)) - f(u, g_2(u))\| du \Big| \\ &\leq K \Big| \int_{t_0}^{t} \|g_1 - g_2\| \Big| \leq Kr\|g_1 - g_2\|_\infty \end{aligned}$$

ou encore

$$\|h(g_1) - h(g_2)\|_\infty \leq Kr\|g_1 - g_2\|_\infty$$

Donc, quitte à réduire encore r pour avoir $Kr < 1$, nous obtenons bien une fonction $h : A \to A$, k-lipschitzienne, où A est le fermé $\mathcal{C}^0(\bar{B}(t_0, r), \bar{B}(v_0, \rho))$ inclus dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0(\bar{B}(t_0, r), E)$ (muni de la norme ∞). Cet espace $\mathcal{E}$ est complet, c'est bien connu. Cela achève donc la démonstration.

2.11. **Théorème.** *Parmis les paires (J, x) avec J un intervalle et $x : J \to E$ satisfaisant à l'équation différentielle et à $x(t_0) = v_0$, il en existe une $(J_{\max}, x_{\max})$ qui est maximale : pour toute paire (J, x), on a $J \subset J_{\max}$ et $x = (x_{\max})_{|J}$. L'intervalle $J_{\max}$ est alors ouvert dans I.*

Soit $J_{\max}$ l'union de tous les intervalles J contenant t_0 dans leur intérieur et sur lesquels il existe une solution valant v_0 en t_0. Alors c'est un intervalle, comme sur chaque tel J, la solution est unique, on peut définir une solution sur $x_{\max}$ sur $J_{\max}$ comme étant la seule qui se restreint sur tout J à l'unique solution de J. Reste à montrer que ce $J_{\max}$ est ouvert. S'il ne l'était pas, il aurait une borne fermée, disons t_1 et supposons qu'elle soit la borne supérieure. Alors $t_1 \in J_1$ pour un certain J_1 et on aurait donc une valeur $x(t_1)$. Par application du problème de Cauchy en ce t_1 avec la valeur x_{t_1} on pourrait prolonger la solution à un ouvert contenant b et donc des $t > b$.

2.12. **Théorème** (Cauchy-Lipschitz global)**.** *Soit I un intervalle, $f : I \times E \to E$ une fonction continue et lipschitzienne par rapport à la seconde variable localement en la première variable, alors la solution maximale est globale, c'est-à-dire définie sur I tout entier.*

On refait la preuve en utilisant E tout entier au lieu de $\bar{B}(v_0, \rho)$, et en sautant la partie qui sert à ce que h soit bien définie, puisque cette fois-ci, c'est le cas sur tout $\mathcal{C}^0(I, E)$. Par ailleurs, en supposant que la solution maximale (valant v_0 en t_0) soit définie sur un intervalle ouvert J strictement inclus dans I, il y a donc une borne de $J_{\max}$ dans I (et hors de $J_{\max}$, qui est ouvert). Appelons-là t_1. On choisit une boule $\bar{B}(t_1, r)$ de rayon non nul sur laquelle la fonction f est K-lipschitzienne, avec $Kr < 1$ (quitte à réduire r). On se place alors en un point t_2 dans $J_{\max}$ et à distance $< r$ de t_1. Alors comme dans la fin de la preuve mais en prenant t_2 comme point de base, il existe une solution sur $[t_2, t_1]$ (ou $[t_1, t_2]$ selon que t_1 est la borne supérieure ou inférieure de $J_{\max}$) valant $x(t_2)$ en t_2, et par recollement on prolonge donc la solution maximale jusqu'à t_1, hors de $J_{\max}$, ce qui est impossible.