ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Résumé de cours de calcul différentiel 2 L3 de B. Calmès, Université d'Artois
(version du 18 avril 2016)

1. Rappels en dimension 1

On rappelle que l'équation homogène

$$x' = ax \qquad \text{avec } a : I \to \mathbb{R} \text{ continue}$$

a pour solutions l'ensemble des fonctions de la forme $Ce^{\int a}$ où $\int a$ désigne une primitive de a.

En présence d'une équation avec second membre

$$x' = ax + b \qquad \text{avec } a, b : I \to \mathbb{R} \text{ continues}$$

on remarque qu'étant donnée une solution x_p, toutes les autres diffèrent de celle-ci par une solution de l'équation homogène (qu'on a déjà résolue). Si on dispose d'une telle solution x_p, c'est terminé, sinon, la méthode dite de *variation de la constante* consiste à dire que l'équation équivaut à

$$\lambda' = be^{-\int a}$$

où $\lambda = xe^{-\int a} = x/x_h$ où x_h est une solution de l'équation homogène précédente. On obtient alors λ comme primitive $\int be^{-\int a}$. En pratique, il peut bien entendu être pénible (voire impossible) d'exprimer de telles primitives en utilisant des fonctions classiques.

2. Rappels sur l'exponentielle d'une matrice et d'un endomorphisme

On rappelle les faits suivants. Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice, on note

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

son *exponentielle*, qui est donc également un élément de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (la somme infinie converge pour toute matrice A). Lorsque D est une matrice diagonale, son exponentielle est donc évidemment la matrice diagonale obtenue en prenant l'exponentielle de chaque terme sur la diagonale. Lorsque N est une matrice nilpotente d'ordre p, alors la somme définissant $\exp(N)$ est finie et s'arrête à p.

Puisque le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[A]$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il est fermé et complet, donc la somme infinie définissant $\exp(A)$ converge en fait dedans, et il existe donc un polynôme P_A (dépendant de A) tel que $\exp(A) = P_A(A)$. En particulier, $\exp(A)$ commute avec A.

Prendre l'exponentielle commute au changement de base :

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$$

Ceci permet par exemple de définir l'exponentielle d'un endomorphisme (en dimension finie) en choisissant une base pour se ramener à une matrice, puisque cela montre que le résultat est indépendant de la base choisie.

Lorsque A est diagonalisable, avec $PDP^{-1} = A$, on a donc $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$, cette dernière étant évidente à calculer. On peut montrer que lorsque les matrices A et B commutent, on a bien

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

(et que c'est faux en général). En particulier, si $A = D + N$ où D est diagonale, N est nilpotente et D et N commutent, alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$, ces deux dernières étant évidentes à calculer. Cela montre également que $\exp(A)$ est toujours inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

La dérivée de la fonction $t \mapsto \exp(tA)$ est $t \mapsto \exp(tA)A = A\exp(tA)$. Attention, si $A(t) : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction dérivable, il n'est pas vrai que la dérivée de $t \mapsto \exp(A(t))$ soit $t \mapsto \exp(A(t))A'(t)$ ni $A'(t)\exp(A(t))$. C'est toutefois vrai si $A(t)$ commute à $A'(t)$ (en particulier dans le cas où $A(t) = tA$ pour une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Équations linéaires

Nous discutons maintenant des systèmes d'un nombre fini d'équations différentielles dites linéaires définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Nous supposerons pour l'instant que ce système s'écrit

$$x' = ax + v \tag{3.1}$$

où $x : I \to E$ est dérivable et $v : I \to E$ et $a : I \to \mathcal{L}(E)$ sont continues. Nous dirons qu'une telle équation différentielle est sous forme *normale.*

3.1. *Remarque.* Si $E = \mathbb{R}^n$, et qu'on interprête l'équation différentielle sous forme normale comme un système, il aura autant d'équations que de fonctions inconnues.

3.2. *Remarque.* Si a et b sont dérivables (resp. $\mathcal{C}^1$), alors x est automatiquement deux fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^2$).

3.3. **Théorème.** *Étant donné $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$, l'équation différentielle (3.1) admet une unique solution $x : I \to E$ telle que $x(t_0) = y_0$.*

Soit une équation linéaire homogène

$$x' = ax. \tag{3.2}$$

Ses solutions forment de manière évidente un espace vectoriel.

3.4. **Corollaire.** *L'application de E vers l'espace vectoriel des solutions de (3.2) envoyant y_0 sur l'unique solution de (3.2) qui vaut y_0 en t_0 est linéaire et est un isomorphisme. En particulier, la dimension de E et celle de cet espace de solutions sont égales.*

Étant donné une solution x_0 (quelconque) de l'équation totale (3.1), toutes ses solutions sont alors exactement les fonctions x de la forme $x = x_h + x_0$ où et x_h est dans l'espace vectoriel solution de l'équation homogène (3.2).

La structure de l'espace des solutions étant établie, on s'intéresse maintenant à des méthodes de résolutions explicites.

4. Variation des constantes

Le but de cette partie est d'expliquer comment trouver par calcul de primitives des solutions de l'équation avec second membre (3.1) quand on connaît déjà les solutions de l'équation homogène (3.2).

Soient $x_1, \dots, x_n$ une base des solutions de l'équation homogène. Remarquons qu'en tout t, les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants par l'unicité de la solution au problème de Cauchy.

4.1. **Lemme.** *Si $x : I \to E$ est une fonction dérivable quelconque, il existe d'uniques fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ toutes dérivables et de $I \to \mathbb{R}$ telles que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.*

Appliquant ce lemme à une solution x de l'équation avec second membre (3.1), et en utilisant l'équation, on trouve immédiatement que les $\lambda_i : I \to \mathbb{R}$ doivent vérifier

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' x_i = b$$

ce qui détermine les λ_i' toujours par le même lemme. Il suffit alors d'en prendre des primitives.

5. Coefficients constants

On considère tout d'abord une équation différentielle *homogène* et à coefficients *constants*, sous forme normale :

$$x' = Ax \tag{5.1}$$

où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et dont on veut expliciter les solutions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Étant données les propriétés de l'exponentielle déjà rappelées, on a immédiatement :

5.1. **Théorème.** *Les solutions de l'équation* (5.1) *sont exactement les fonctions de la forme*

$$x(t) = e^{tA} y_0$$

où $y_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur quelconque.

5.2. *Remarque.* Bien entendu, $x(0) = y_0$. On a donc la solution au problème de Cauchy en $t_0 = 0$. La solution au problème de Cauchy en un autre point t_0, imposant $x(t_0) = y_0$, est donc obtenue par décalage : $x(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 = e^{tA} e^{-t_0 A} y_0$.

5.3. *Remarque.* Par définition de l'exponentielle,

$$x(t) = e^{tA} x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x_0$$

ce qui donne explicitement un développement en séries entières de la solution x.

On peut alors avoir les solutions de l'équation avec second membre par la méthode de variation des constantes.

6. Méthodes de calcul

Toujours dans le cas des équations linéaires à coefficients constants, voici quelques méthodes qui permettent dans certains cas de donner plus facilement les solutions.

6.1. **Changement de base.** Par un changement de base adéquat $B = P^{-1}AP$, le calcul de $e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$ peut-être grandement simplifié, si par exemple B est diagonale, ou nilpotente, ou une somme $D+N$ avec D et N qui commutent.

On peut par exemple choisir B diagonale si A est diagonalisable, voire seulement $B = D+N$ si le polynôme minimal de A est scindé sur $\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on peut éventuellement passer aux nombres complexes, les raisonnements de ce chapître s'appliquant également pour des fonctions $I \to \mathbb{C}$.

6.2. **Équation scalaire d'ordre n.** Partant d'une équation linéaire scalaire à coefficients constants et d'ordre n, de la forme

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b \tag{6.1}$$

(dont les solutions sont donc de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) nous avons vu précédemment qu'on peut se ramener à une équation d'ordre 1, mais dans $\mathbb{R}^n$. Elle serait de la forme $y' = Ay+B$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et la matrice A a des 1 juste au-dessus de la diagonale, et les coefficients $-a_0, \ldots, -a_{n-1}$ sur la dernière ligne (et des zéros partout ailleurs).

Nous savons donc que l'équation homogène associée

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0 \tag{6.2}$$

a pour ensemble de solution un espace vectoriel de dimension n.

Considérons le polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X + \cdots + a_0$, parfois appelé polyôme caractéristique associé à l'équation différentielle (6.2).

6.1. **Proposition.** *Si P est scindé et avec des racines distinctes $r_1, \ldots, r_p$, d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, alors les solutions de l'équation différentielle* (6.2) *sont les fonctions de la forme*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(t)e^{r_i t} \qquad \text{où } Q_i \in \mathbb{R}[X] \text{ est de degré} < \alpha_i.$$