II. Équations différentielles linéaires

Baptiste Calmès

24 janvier 2018

Table des matières

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $I \to \mathbb{R}$ est dite continue (resp. dérivable, resp. k fois dérivable, resp. $\mathcal{C}^k$) si elle est continue (resp. dérivable etc.) en tout point intérieur de I, et dans le cas où I est de la forme $[a, \ldots$, si elle est continue à droite en a (resp. dérivableà droite, etc.). De même si I est de la forme $\ldots, b]$ mais à gauche.

1 Ordre ou dimension 1 et 2

On rappelle que l'équation homogène

$$x' = ax \qquad \text{avec } a : I \to \mathbb{R} \text{ continue} \tag{1.1}$$

a pour solutions l'ensemble des fonctions de la forme $Ce^{\int a}$ où $\int a$ désigne une primitive de a.

En présence d'une équation linéaire d'ordre 1 avec second membre

$$x' = ax + b \qquad \text{avec } a, b : I \to \mathbb{R} \text{ continues,} \tag{1.2}$$

étant donnée une solution x_p, toutes les autres diffèrent de celle-ci par une solution de l'équation homogène (1.1) (déjà résolue).

Si l'on dispose d'une telle solution x_p, c'est terminé, sinon, la méthode dite de *variation de la constante* consiste à dire que l'équation équivaut à :

$$\lambda' = be^{-\int a}$$

où $\lambda = xe^{-\int a} = x/x_h$ où x_h est une solution de l'équation homogène précédente. On obtient alors λ comme primitive $\int be^{-\int a}$. En pratique, il peut bien entendu être pénible (voire impossible) d'exprimer de telles primitives en utilisant des fonctions classiques.

On peut remarquer que si l'on se donne $x_0 \in \mathbb{R}$ et un $t_0 \in I$, il existe une unique solution x de (1.2) telle que $x(t_0) = x_0$.

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre sous forme normale

$$x'' = ax' + bx + c \qquad \text{avec } a, b, c : I \to \mathbb{R} \text{ continues} \tag{1.3}$$

peut se ramener à une forme matricielle

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b} \qquad \text{avec} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

1.1 Structure de l'ensemble des solutions

Pour une équation différentielle homogène à valeurs dans $\mathbb{R}$ et d'ordre 1 sous forme normale, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 1, et lorsqu'il y a un second membre, les solutions sont juste les translatées de cet espace vectoriel par une solution (n'importe laquelle) de l'équation totale.

L'analogue est vrai pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2, mais la preuve est déjà plus délicate. En fait, elle n'est pas plus facile pour l'ordre 2 que pour l'ordre n, et nous la verrons plus tard en 3.3. Admettons pour l'instant :

1.1 Théorème. *L'ensemble* Sol_h *des solutions* $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^2$ *d'une équation vectorielle*

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad \textit{avec} \quad A : I \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \ \textit{continue}$$

forme un sous-espace vectoriel de dimension 2 *des fonctions de* $I \to \mathbb{R}^2$*. Si* $t_0 \in I$*, l'application* $\mathrm{Sol}_h \to \mathbb{R}^2$ *envoyant* $\vec{x}$ *sur* $\vec{x}(t_0)$ *est un isomorphisme.*

1.2 Corollaire. *L'ensemble* Sol_h *des solutions de l'équation linéaire homogène (normale)* (1.3) *d'ordre 2 à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est sous-espace vectoriel de dimension* 2 *des fonctions de* $I \to \mathbb{R}$*. Si* $t_0 \in I$*, l'application* $\mathrm{Sol}_h \to \mathbb{R}^2$ *envoyant* x *sur* $(x(t_0), x'(t_0))$ *est un isomorphisme.*

1.3 Théorème. *L'ensemble* Sol *des solutions* $x : I \to \mathbb{R}^2$ *d'une équation vectorielle*

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b} \qquad \textit{avec} \quad A : I \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad \vec{b} : I \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{continues}$$

est non vide et étant donné une (n'importe quelle) solution $\vec{x}_p$*, l'ensemble des solutions* Sol *est l'espace affine translaté de* Sol_h *par* $\vec{x}_p$ *:*

$$\mathrm{Sol} = \{\vec{x}_p + \vec{h},\ \vec{h} \in \mathrm{Sol}_h\}.$$

1.2 Coefficients constants

Si les coefficients A et $\vec{b}$ ne sont pas constants, on n'a pas de méthode générale pour expliciter les solutions elle-mêmes.

Si les coefficients sont constants, on peut faire comme à l'ordre 1, mais en utilisant l'exponentielle d'une matrice (voir section 2) :

$$e^M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}$$

En effet, si A est une matrice constante, on a

$$\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

(ce qui n'est pas vrai si elle dépend de t). Du coup, l'ensemble des solutions de l'équation homogène $X' = AX$ est évidement de la forme $e^{tA}X_0$ où $X_0 \in \mathbb{R}^2$. En pratique, on peut vouloir calculer cette exponentielle de matrice (donner ses coefficients comme fonctions de t). Nous verrons cela plus tard.

1.4 Remarque. Si on se donne $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^2$, l'unique solution de $\vec{x}' = A\vec{x}$ qui vaut $\vec{x}_0$ en t_0 est $e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0$.

1.3 Polynôme caractéristique

Revenons à l'équation homogène $x'' = ax' + bx$ (coefficients constants), moins générale que l'équation vectorielle.

Clairement, e^{rt} est solution de cette équation si et seulement si r est racine du polynôme $\chi(z) = z^2 - az - b$. Si χ a deux racines réelles distinctes (r_1, r_2), on a trouvé deux solutions linéairement indépendantes $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$, donc toutes les solutions par le corollaire 1.2. Si ce polynôme a deux racines complexes non réelles, elles sont conjuguées, disons $r \pm is$ avec $s \neq 0$, et on peut donc fabriquer deux solutions réelles linéairement indépendantes par les deux combinaisons linéaires

$$\tfrac{1}{2}(e^{(r+is)t} + e^{(r-is)t}) = e^{rt}\cos(st) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2i}(e^{(r+is)t} - e^{(r-is)t}) = e^{rt}\sin(st)$$

ce qui suffit également.

Si χ a une racine double r (nécessairement réelle), r est racine du polynôme dérivé $2z - a$ (i.e. $r = a/2$), et alors e^{rt} est solution et également te^{rt}. Cela suffit toujours.

1.4 Wronskien

Revenons au cas de l'équation homogène $x'' = ax' + bx$ mais à coefficients a et b *non constants*. Considérons x_1 et x_2 deux solutions. Leur Wronskien est le déterminant

$$w = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = x_1 x_2' - x_2 x_1' \tag{1.5}$$

qui est donc une fonction dérivable $w : I \to \mathbb{R}$. Un calcul immédiat montre que $w' = aw$, donc $w = \lambda e^{\int a}$, ou encore $w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t a}$ si $t_0 \in I$.

1.5 Remarque. Cette formule ne dépend que de la condition initiale $w(t_0) = x_1(t_0)x_2'(t_0) - x_2(t_0)x_1'(t_0)$. On a donc déterminé w sur I sans avoir explicitement x_1 ou x_2, seulement leurs conditions initiales.

1.6 Lemme. *Soit w est identiquement nul sur I (i.e. $\lambda = 0$), auquel cas x_1 et x_2 sont liées, soit w ne s'annule pas sur I, auquel cas x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes.*

Par ailleurs, si l'on connait déjà une solution, disons x_1, alors pour en trouver une autre indépendante, il suffit de résoudre l'équation différentielle (1.5) d'ordre 1 en x_2, ce qu'on sait faire par primitives.

On peut parfois chercher des solutions d'une équation différentielle linéaire sous forme de série entière, dont on déterminera le rayon de convergence.

2 Rappels sur l'exponentielle d'une matrice et d'un endomorphisme

On rappelle les faits suivants. Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice, on note

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

son *exponentielle*, qui est donc également un élément de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (la somme infinie converge pour toute matrice A). Lorsque D est une matrice diagonale, son exponentielle est donc évidemment la matrice diagonale obtenue en prenant l'exponentielle de chaque terme sur la diagonale. Lorsque N est une matrice nilpotente d'ordre p, alors la somme définissant $\exp(N)$ est finie et s'arrête à p.

Puisque le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[A]$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il est fermé et complet, donc la somme infinie définissant $\exp(A)$ converge en fait dedans, et il existe donc un polynôme P_A (dépendant de A) tel que $\exp(A) = P_A(A)$. En particulier, $\exp(A)$ commute avec A.

Prendre l'exponentielle commute au changement de base :

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$$

Ceci permet par exemple de définir l'exponentielle d'un endomorphisme (en dimension finie) en choisissant une base pour se ramener à une matrice, puisque cela montre que le résultat est indépendant de la base choisie.

Lorsque A est diagonalisable, avec $PDP^{-1} = A$, on a donc $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$, cette dernière étant évidente à calculer. On peut montrer que lorsque les matrices A et B commutent, on a bien

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

(et que c'est faux en général). En particulier, si $A = D + N$ où D est diagonale, N est nilpotente et D et N commutent, alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$, ces deux dernières étant évidentes à calculer. Cela montre également que $\exp(A)$ est toujours inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

La dérivée de la fonction $t \mapsto \exp(tA)$ est $t \mapsto \exp(tA)A = A\exp(tA)$. Attention, si $A(t) : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction dérivable, il n'est pas vrai que la dérivée de $t \mapsto \exp(A(t))$ soit $t \mapsto \exp(A(t))A'(t)$ ni $A'(t)\exp(A(t))$. C'est toutefois vrai si $A(t)$ commute à $A'(t)$ (en particulier dans le cas où $A(t) = tA$ pour une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Dimension ou ordre quelconque

Nous discutons maintenant des systèmes d'un nombre fini d'équations différentielles dites linéaires définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Nous supposerons pour l'instant que ce système s'écrit

$$\vec{x}' = a\vec{x} + \vec{b} \tag{3.1}$$

où $\vec{x} : I \to E$ est dérivable, alors que $\vec{b} : I \to E$ et $a : I \to \mathcal{L}(E)$ sont continues. Nous dirons qu'une telle équation différentielle est sous forme *normale*.

3.1 Remarque. Si $E = \mathbb{R}^n$, et qu'on interprête l'équation différentielle sous forme normale comme un système, il aura autant d'équations que de fonctions inconnues.

3.2 Remarque. Si a et $\vec{b}$ sont dérivables (resp. $\mathcal{C}^1$), alors $\vec{x}$ est automatiquement deux fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^2$).

3.3 Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Étant donné $t_0 \in I$ et $\vec{y}_0 \in E$, l'équation différentielle* (3.1) *admet une unique solution $\vec{x} : I \to E$ telle que $\vec{x}(t_0) = \vec{y}_0$.*

Soit une équation linéaire homogène

$$\vec{x}' = a\vec{x}. \tag{3.2}$$

définie sur un intervalle I. Ses solutions forment de manière évidente un sous-espace vectoriel des fonctions de $I \to \mathbb{R}$, notons le Sol_h.

3.4 Corollaire. *L'application linéaire* $\mathrm{Sol}_h \to E$ *envoyant $\vec{y}$ sur $\vec{y}(t_0)$ est un isomorphisme, d'inverse envoyant $\vec{y}_0$ sur l'unique solution de* (3.2) *qui vaut $\vec{y}_0$ en t_0. En particulier, la dimension de E et celle de* Sol_h *sont égales.*

Étant donné une solution $\vec{x}_p$ (quelconque) de l'équation totale (3.1), toutes ses solutions sont alors exactement les fonctions $\vec{x}$ de la forme $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p$ où $\vec{x}_h$ est dans l'espace vectoriel Sol_h des solutions de l'équation homogène (3.2).

La structure de l'espace des solutions étant établie, on s'intéresse maintenant à des méthodes de résolutions explicites.

4 Variation des constantes

Le but de cette partie est d'expliquer comment trouver par calcul de primitives des solutions de l'équation avec second membre (3.1) quand on connaît déjà les solutions de l'équation homogène (3.2).

Soient $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ une base des solutions de l'équation homogène. Remarquons qu'en tout t, les vecteurs $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ sont linéairement indépendants par l'unicité de la solution au problème de Cauchy.

4.1 Lemme. *Si $\vec{x} : I \to E$ est une fonction dérivable quelconque, il existe d'uniques fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ toutes dérivables et de $I \to \mathbb{R}$ telles que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i$.*

Appliquant ce lemme à une solution $\vec{x}$ de l'équation avec second membre (3.1), et en utilisant l'équation, on trouve immédiatement que les $\lambda_i : I \to \mathbb{R}$ doivent vérifier

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \vec{x}_i = \vec{b}$$

ce qui détermine les λ_i' toujours par le même lemme. Il suffit alors d'en prendre des primitives.

5 Coefficients constants

On considère tout d'abord une équation différentielle *homogène* et à coefficients *constants*, sous forme normale :

$$\vec{x}' = A\vec{x} \tag{5.1}$$

où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et dont on veut expliciter les solutions $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Étant données les propriétés de l'exponentielle déjà rappelées, on a immédiatement :

5.1 Théorème. *Les solutions de l'équation* (5.1) *sont exactement les fonctions de la forme*

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{y}_0$$

où $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ *est un vecteur quelconque.*

5.2 Remarque. Bien entendu, $\vec{x}(0) = \vec{y}_0$. On a donc la solution au problème de Cauchy en $t_0 = 0$. La solution au problème de Cauchy en un autre point t_0, imposant $\vec{x}(t_0) = \vec{y}_0$, est donc obtenue par décalage : $\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 = e^{tA}e^{-t_0A}\vec{y}_0$.

5.3 Remarque. Par définition de l'exponentielle,

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \vec{x}_0$$

ce qui donne explicitement un développement en séries entières de la solution $\vec{x}$.

On peut alors avoir les solutions de l'équation avec second membre par la méthode de variation des constantes.

6 Méthodes de calcul

Toujours dans le cas des équations linéaires à coefficients constants, voici quelques méthodes qui permettent dans certains cas de donner plus facilement les solutions.

6.1 Changement de base

Par un changement de base adéquat $B = P^{-1}AP$, le calcul de $e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$ peut-être grandement simplifié, si par exemple B est diagonale, ou nilpotente, ou une somme $D + N$ avec D et N qui commutent.

On peut par exemple choisir B diagonale si A est diagonalisable, voire seulement $B = D + N$ si le polynôme minimal de A est scindé sur $\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on peut éventuellement passer aux nombres complexes, les raisonnements de ce chapître s'appliquant également pour des fonctions $I \to \mathbb{C}$.

6.2 Équation scalaire d'ordre n

Partant d'une équation linéaire scalaire à coefficients constants et d'ordre n, de la forme

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b \tag{6.1}$$

(dont les solutions sont donc de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) nous avons vu précédemment qu'on peut se ramener à une équation d'ordre 1, mais dans $\mathbb{R}^n$, de la forme $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$ avec $\vec{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Nous savons donc que l'équation homogène associée

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0 \tag{6.2}$$

a pour ensemble de solution un espace vectoriel de dimension n.

Considérons le polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X + \cdots + a_0$, parfois appelé polyôme caractéristique associé à l'équation différentielle (6.2).

6.1 Proposition. *Si P est scindé et avec des racines distinctes $r_1, \ldots, r_p$, d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, alors les solutions de l'équation différentielle* (6.2) *sont les fonctions de la forme*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(t)e^{r_i t} \qquad \text{où } Q_i \in \mathbb{R}[X] \text{ est de degré} < \alpha_i.$$

7 Développements en séries entières

Rappelons que

7.1 Proposition. *Une série entière est infiniment dérivable sur son disque ouvert de convergence, et sa dérivée est la somme de la série dérivée terme à terme.*

7.2 Définition. On dit que la série $\sum b_n z^n$ est *majorante* de $\sum a_n z^n$ si $|a_n| \leq b_n$ pour tout n.

On a alors

7.3 Proposition. *Si la série $\sum b_n z^n$ est* majorante *de $\sum a_n z^n$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est au moins celui de $\sum b_n z^n$, et réciproquement, si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, pour tout $r < R$, il existe une série majorante $\sum b_n z^n$ dont le rayon de convergence est r, de la forme $\sum \frac{M}{r^n} z^n = 1/(1 - \frac{z}{r})$.*

7.4 Théorème. *Si dans l'équation différentielle à valeurs dans E*

$$\vec{x}'(t) = a(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \tag{7.1}$$

les fonctions a et $\vec{b}$ sont développables en série entière en 0 avec un rayon de convergence $\geq R$, il en est de même de toute solution.

7.5 Théorème. *Supposons que dans l'équation différentielle*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x(t) + a_0(t) = 0$$

les a_i soient développables en série entière en 0, de rayon de convergence au moins R. Alors il en est de même de toute solution.

8 Indépendance linéaire et Wronskien

Revenons à l'équation homogène $\vec{x}' = a\vec{x}$ (3.2), sur l'intervalle I et à valeurs dans E.

8.1 Théorème. *Soit $t_0 \in I$. Des solutions $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p$ de $\vec{x}' = a\vec{x}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_p(t_0)$ sont linéairement indépendants. En particulier, si c'est le cas en un point t_0, c'est le cas en tout point t_0.*

8.2 Définition (Wronskien)**.** Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soient $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ des solutions de (1.1). On définit leur *Wronskien* comme la fonction $\Delta(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) : I \to \mathbb{R}$ égale au déterminant

$$\Delta(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)(t) = \det\big(\vec{x}_1(t), \ldots \vec{x}_n(t)\big).$$

(où les $\vec{x}_i$ sont exprimés sur la base canonique).

8.3 Corollaire. *Si $E = \mathbb{R}^n$, des solutions $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sont linéairement indépendantes si et seulement si leur Wronskien $\Delta(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est non nul en un point de I, si et seulement s'il est non nul partout sur I.*

8.4 Proposition. *Le Wronskien vérifie l'équation différentielle $\Delta' = \mathrm{tr}(a)\Delta$. Il est donc de la forme $\Delta = Ce^{\int \mathrm{tr}(a)}$, ou encore $\Delta(t) = \Delta(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(a(u))\,du}$. Soit les solutions sont liées et leur Wronskien est nul, soit elles sont linéairement indépendantes, et à une constante multiplicative réelle non nulle près, ce Wronskien est une fonction indépendante du choix de ces n solutions.*

Tirons-en les conséquences pour une équation scalaire homogène d'ordre n (à coefficients non nécessairement constants)

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0. \tag{8.1}$$

8.5 Corollaire. *Soient $x_1, \dots, x_p : I \to \mathbb{R}$ des solutions de* (8.1)*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$x_1, \dots, x_p$ sont linéairement indépendantes ;*
2. *il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $\big(x_i(t_0), \dots, x_i^{(n-1)}(t_0)\big)$ pour $i = 1, \dots, p$ sont linéairement indépendants ;*
3. *pour tout $t \in I$, les vecteurs $\big(x_i(t), \dots, x_i^{(n-1)}(t)\big)$ pour $i = 1, \dots, p$ sont linéairement indépendants.*

8.6 Définition. Le Wronskien de n fonctions $(n-1)$ fois dérivables $x_1, \dots, x_n : I \to \mathbb{R}$ est la fonction $I \to \mathbb{R}$ déterminant de la matrice des $\big(x_i^{(j)}\big)$ pour $1 \leq i \leq n$, et $0 \leq j \leq n-1$.

8.7 Corollaire. *Si ces fonctions sont solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre n, alors leur Wronskien est non nul en un point de I si et seulement s'il est non nul en tout point de I, si et seulement si les fonctions sont linéairement indépendantes.*

8.8 Proposition. *Le Wronskien de n solutions de* (8.1) *vérifie $\Delta' = -a_{n-1}\Delta$ où a_{n-1} est la fonction devant $x^{(n-1)}$ dans l'équation* (8.1)*. Il est donc égal à $\Delta = Ce^{-\int a_{n-1}}$ pour $C \in \mathbb{R}$.*

9 Résolvante

La résolvante encode le changement de point t_0 en lequel on résout le problème de Cauchy.

Soit Sol_h l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène (3.2), et soit $S_t : \mathrm{Sol}_h \to E$ l'isomorphisme du corollaire 3.4, envoyant une solution $\vec{x}$ sur $\vec{x}(t)$.

9.1 Définition. La résolvante de l'équation homogène (3.2) est l'application

$$R : I \times I \to \mathcal{L}(E)$$

définie par $R(t_2, t_1) = S_{t_2} \circ S_{t_1}^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dd, "R(t_2,t_1)", "\simeq"'] \\
\mathrm{Sol}_h \arrow[ur, "S_{t_1}", "\simeq"'] \arrow[dr, "S_{t_2}"', "\simeq"] & \\
 & E
\end{tikzcd}$$

9.2 Proposition. *La résolvante jouit des propriétés suivantes :*

1. *$R(t,t) = \mathrm{id}_E$;*
2. *$R(t_3, t_2) \circ R(t_2, t_1) = R(t_3, t_1)$;*
3. *Si $x_1, \dots, x_n$ est une base de Sol_h, alors $R(t_2, t_1)$ est l'unique application linéaire qui envoie $\vec{x}_i(t_1)$ sur $\vec{x}_i(t_2)$ pour tout i.*
4. *$\frac{d}{dt}R(t,s) = a(t)R(t,s)$ et $\frac{d}{ds}R(t,s) = -R(t,s)a(s)$;*

5. *L'unique solution de l'équation* $\vec{x}' = a\vec{x}$ (3.2) *qui vaut* $\vec{y}_0$ *en* t_0 *est* $t \mapsto R(t,t_0)\vec{y}_0$ *;*
6. *L'unique solution de l'équation avec second membre* $\vec{x}' = a\vec{x} + \vec{b}$ (3.1) *qui vaut* $\vec{y}_0$ *en* t_0 *est* $t \mapsto R(t,t_0)\vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\vec{b}(s)\,ds$ *;*
7. $\det R(t_2,t_1) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{tr}(a(u))\,du}$.