III. Problème de Cauchy

Baptiste Calmès

20 juin 2019

Table des matières

1 Forme générale

Tous les evn considérés sont toujours sur $\mathbb{R}$ et de dimension finie, sauf mention expresse du contraire.

Nous allons étudier des équations reliant des fonctions et leurs dérivées successives. Nous imposerons donc que ces fonctions soient définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, de longeur non vide. La raison est premièrement qu'il faut que la continuité et la dérivabilité aient un sens, ce qui contraint à se placer sur une union finie (pour éviter les cas pathologiques) d'intervalles d'intérieur non vide disjoints, et pour une telle union, il suffit de trouver les solutions sur chaque intervalle (composante connexe) la composant pour obtenir les solution sur l'union.

Comme d'habitude, une fonction est dite $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle si elle est $\mathcal{C}^k$ sur son intérieur et si elle est $\mathcal{C}^k$ à gauche ou à droite selon le cas aux bornes.

1.1 Définition. Une équation différentielle sur I pour les fonctions $I \to E$, où E est un evn, est la donnée d'une fonction

$$F : U \to E'$$

où U est une partie de $I \times E^{n+1}$ et E' est un autre evn. On dit qu'une fonction $\vec{x} : I \to E$ est *solution* de cette équation différentielle si ses n dérivées (notées $\vec{x}^{(i)}$) existent et satisfont à

$$\begin{aligned} (t, \vec{x}(t), \vec{x}'(t), \ldots, \vec{x}^{(n)}(t)) \in U \quad \forall t \in I \\ F\big(t, \vec{x}(t), \vec{x}'(t), \ldots, \vec{x}^{(n)}(t)\big) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

On dit qu'elle est *d'ordre* n si F n'est pas indépendante de sa dernière variable E.

Quitte à changer E en $H = E^n$ et E' en $H' = E^{n-1} \oplus E'$, on peut toujours se ramener à une équation d'ordre 1. En effet, si $G : I \times (E^n)^2 \to E^{n-1} \oplus E'$ est donnée par ses composantes

$$\begin{aligned} G_i(t, \vec{y}, \vec{z}) &= \vec{z}_i - \vec{y}_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \text{ et} \\ G_n(t, \vec{y}, \vec{z}) &= F(t, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n, \vec{z}_n) \end{aligned}$$

alors G est une équation différentielle d'ordre 1 et

$$\vec{x} \mapsto \vec{y} = (\vec{x}, \vec{x}', \ldots, \vec{x}^{(n-1)})$$

réalise une bijection des solutions de l'équation (1.1) vers celles de $G(t, \vec{y}, \vec{y}') = 0$ de bijection inverse $\vec{y} \mapsto \vec{y}_1$. Il est immédiat de vérifier qu'une solution de l'une est envoyé sur une solution de l'autre.

2 Le problème de Cauchy

Partons d'une équation d'ordre 1

$$G(t, \vec{x}, \vec{x}') = 0 \tag{2.1}$$

définie sur I, avec $\vec{x} : I \to E$.

2.1 Problème (de Cauchy)**.** *Étant donné un $t_0 \in I$ et un $\vec{v}_0 \in E$, existe-t-il une solution $\vec{x}$ de* (2.1) *telle que $\vec{x}(t_0) = \vec{v}_0$? Et si oui, est-elle unique ?*

En fait, nous n'allons pas répondre au problème en toute généralité, mais tout de même dans une grande généralité.

Nous nous contenterons d'une équation de la forme

$$\vec{x}' = F(t, \vec{x}) \tag{2.2}$$

c'est-à-dire où la fonction G de (2.1) est de la forme $G(t, \vec{x}, \vec{x}') = \vec{x}' - F(t, \vec{x})$, où $F : U \to E$, avec U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.

2.2 Remarque. Si $F : U \to E$ est $\mathcal{C}^k$, alors toute solution de (2.2) est $\mathcal{C}^{k+1}$.

2.3 Définition. Une telle application $F : U \to E$ est dite :

1. *lipschitzienne par rapport à la seconde variable* s'il existe un réel positif K tel que $\forall t, \vec{x}, \vec{y}$ tels que $(t, \vec{x}), (t, \vec{y}) \in U$, on ait
$$\|F(t, \vec{y}) - F(t, \vec{x})\| \leq K\|\vec{y} - \vec{x}\|. \tag{2.3}$$
2. *localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable* si tout point de U est contenu dans un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que la fonction $F_{|V}$ est lipschitzienne.
3. *lipschitzienne par rapport à la seconde variable, localement par rapport à la première variable*, si le voisinage ouvert V du point précédent peut être choisi de la forme $V = (I \times E) \cap U$ avec I un intervalle ouvert.

2.4 Remarque. Il est évident qu'une fonction vérifiant 1 vérifie 3 et qu'une fonction vérifiant 3 vérifie 2.

2.5 Lemme. *Pour que F soit localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable, il suffit que F soit différentiable par rapport à cette variable et que l'application "différentielle" $U \to \mathcal{L}(E)$ donnée par $(t, \vec{x}) \mapsto D(F_t)(\vec{x})$ soit continue.*

On a alors le théorème suivant.

2.6 Théorème (Cauchy-Lipschitz)**.** *Étant donné une telle application* continue *$F : U \to E$ localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et un point $(t_0, \vec{v}_0)$ de U. Alors il existe un intervalle J contenant t_0 dans son intérieur, tel que l'équation différentielle (2.2) admette une solution $\vec{x} : J \to E$ vérifiant $\vec{x}(t_0) = \vec{v}_0$. De plus, sur tout intervalle J contenant t_0, il existe au plus une telle solution.*

2.7 Lemme. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un réel t_0. Pour qu'une fonction continue $\vec{x} : J \to E$, de graphe inclus dans U, soit solution de (2.2) et vérifie $\vec{x}(t_0) = \vec{v}_0 \in E$, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'équation intégrale*
$$\vec{x}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, \vec{x}(u))du \tag{2.4}$$
pour tout $t \in J$.

2.8 Remarque. Une fonction continue solution de (2.4) est automatiquement $\mathcal{C}^1$.

L'unicité affirmée en fin du théorème 2.6 est une conséquence des deux lemmes suivants.

2.9 Lemme (de Grönwall)**.** *Soit $\phi : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue sur un interalle I, et soit $t_0 \in I$. Supposons qu'il existe $L, K \geq 0$ tels que*
$$\phi(t) \leq L + K\Big|\int_{t_0}^{t} \phi(u)du\Big| \quad \forall t \in I$$
Alors pour tout $t \in I$, on a $\phi(t) \leq Le^{K|t-t_0|}$. En particulier, si $L = 0$, alors $\phi = 0$.

2.10 Lemme. *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 2.6, si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont deux solutions de* (2.2) *définies sur un même* intervalle *J et si elles coïncident en un point t_0 de J, alors elles sont égales.*

On rappelle le théorème suivant, qui est à la base de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz 2.6.

2.11 Théorème (du point fixe)**.** *Soit A un fermé non vide d'un evn complet $\mathcal{E}$ (non nécessairement de dimension finie), et soit $h : A \to A$ une fonction k-lipschitzienne pour un certain $k < 1$. Alors h possède un unique point fixe, et pour tout $\vec{x}_0 \in A$, la suite définie par récurrence par $\vec{x}_{n+1} = h(\vec{x}_n)$ converge vers ce point fixe.*

Dans un evn, on note $B(\vec{a}, r)$ (resp. $\bar{B}(\vec{a}, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) centrée en $\vec{a}$ et de rayon r.

2.12 Définition (tonneau de sécurité)**.** On dit que le cylindre $C = C(t_0, \vec{y}_0, r, \rho) = \bar{B}(t_0, r) \times \bar{B}(\vec{v}_0, \rho)$ est un *tonneau de sécurité* autour de $(t_0, \vec{v}_0)$ si :

1. $C \subset U$;
2. il existe $M > 0$ tel que $r \leq \rho/M$ et $\forall (t, \vec{y}) \in C$, on ait $\|F(t, \vec{y})\| \leq M$.
3. la fonction F est K-lipschitzienne sur C pour un $K > 0$ tel que $Kr < 1$.

Si t_0 est une borne de I, on demande que C soit de la forme $[t_0, t_0 + r] \times \bar{B}(\vec{v}_0, \rho)$ si c'est une borne inférieure ou bien $[t_0, t_0 + r] \times \bar{B}(\vec{v}_0, \rho)$ si c'est une borne supérieure, et on parle de demi-tonneau de sécurité.

2.13 Lemme. *Si F est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors autour de tout point $(t_0, \vec{v}_0)$ dans U, il existe un (demi-)tonneau de sécurité.*

2.14 Lemme. *Si $C = [t_0 - r, t_0 + r] \times \bar{B}(\vec{v}_0, \rho)$ est un tonneau de sécurité, alors l'équation différentielle admet une (unique) solution sur $[t_0 - r, t_0 + r]$ valant $\vec{v}_0$ en t_0. De même si c'est un demi-tonneau, avec $[t_0, t_0 + r]$ ou bien $[t_0 - r, t_0]$.*

2.15 Théorème. *Parmi les paires $(J, \vec{x})$ avec J un intervalle et $\vec{x} : J \to E$ satisfaisant à l'équation différentielle et à $\vec{x}(t_0) = \vec{v}_0$, il en existe une $(J_{\max}, \vec{x}_{\max})$ qui est maximale : pour toute paire $(J, \vec{x})$, on a $J \subset J_{\max}$ et $\vec{x} = (\vec{x}_{\max})_{|J}$. L'intervalle $J_{\max}$ est alors ouvert dans I.*

Le lemme suivant sert à pouvoir changer un peu de point de base sans réduire la taille de l'intervalle de définition d'une solution en-dessous d'une certaine valeur fixe.

2.16 Lemme. *Soit $C = [t_0 - r, t_0 + r] \times \bar{B}(\vec{v}_0, \rho)$ un tonneau de sécurité autour de $(t_0, \vec{v}_0)$ pour l'équation différentielle $\vec{x}' = F(t, \vec{x})$. Alors pour tout $(t_1, \vec{v}_1) \in C' = \left[t_0 - \frac{r}{2}, t_0 + \frac{r}{2}\right] \times \bar{B}(\vec{v}_0, \frac{\rho}{2})$, la solution maximale de l'équation valant $\vec{v}_1$ en t_1 est définie sur un intervalle contenant $\left[t_1 - \frac{r}{2}, t_1 + \frac{r}{2}\right]$. (De même avec les demi-tonneaux.)*

2.17 Théorème (Cauchy-Lipschitz global)**.** *Soit I un intervalle, $F : I \times E \to E$ une fonction continue et lipschitzienne par rapport à la seconde variable localement en la première variable, alors toute solution maximale du problème de Cauchy en un point de $I \times E$ est globale, c'est-à-dire définie sur I tout entier.*

2.18 Corollaire. *Si $F : I \times E \to E$ est linéaire en sa seconde variable, alors pour tout $(t_0, \vec{v}_0) \in I \times E$, l'équation $\vec{x}' = F(t, \vec{x})$ admet une unique solution $\vec{x} : I \to E$ telle que $\vec{x}(t_0) = \vec{v}_0$.*

2.19 Théorème (des bouts)**.** *On suppose $F : U \to E$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde vaiable. Une solution maximale de l'équation $\vec{x}' = F(\vec{x}, t)$ qui n'est pas globale (i.e. pas définie sur tout I) sort de tout compact inclus dans U (au voisinage de toute borne de son intervalle de définition qui est en dehors de celui-ci et dans I).*

2.20 Exemple. Si $U = I \times \mathbb{R}$, alors une solution qui n'est pas globale n'est pas bornée. Si $U =]a, b[$, une solution maximale qui n'est pas globale doit tendre vers b ou vers a.