V. Compléments

Baptiste Calmès

8 janvier 2018

Table des matières

1 Équations autonômes

Une équation différentielle autonôme est une équation de la forme

$$x' = F(x) \tag{1.1}$$

où $F : U \to E$ est définie sur un ouvert U de E. On spécifie également un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel on considère d'éventuelles solutions $\vec{x} : I \to E$.

1.1 Proposition. *Si $\vec{x} : I \to E$ est une solution de* (1.1)*, alors il en est de même de $\vec{x}_\lambda : I + \lambda \to E$ définie par $\vec{x}_\lambda(t) = \vec{x}(t - \lambda)$. Si $\vec{x}$ est maximale, il en est de même de $\vec{x}_\lambda$.*

Rappelons qu'on peut toujours ramener une équation normale $\vec{x}' = F(t, \vec{x})$ avec $F : U \times E \to E$ à une équation autonôme $\vec{y}' = G(\vec{y})$ avec $G : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R} \times E$ donnée par $G(t, \vec{x}) = (1, F(t, \vec{x}))$.

1.1 Équation autonôme scalaire

Dans le cas d'une équation différentielle autonôme à valeurs dans $\mathbb{R}$, si le problème de Cauchy s'applique, on peut chercher une primitive de

$$\frac{y'}{f(y)} = 1.$$

2 Champs de vecteurs

Soient E_1 et E_2 des espaces vectoriels normés.

2.1 Définition. Un champ de vecteur sur un sous-ensemble X de E_1 à valeurs dans E_2 est une application $f : X \to E_2$.

Intuitivement, cela revient à attacher à chaque point de X un vecteur de E_2. Bien entendu, on impose souvent des conditions à ce champ de vecteurs comme la continuité.

2.2 Définition. Le champ de vecteurs associé à une équation différentielle autonôme $\vec{x}' = F(\vec{x})$ est simplement l'application F.

Par définition, le graphe de toute solution $\vec{x}$ de l'équation a donc pour vecteur tangent en $\vec{x}(t)$ le vecteur du champ de vecteur associé au point $\vec{x}(t)$.

En dessinant le champ de vecteurs, on peut se faire une bonne idée des solutions.

Si $\vec{x}' = F(t, \vec{x})$ est une équation différentielle et qu'on considère l'équation autonôme associée, puis son champ de vecteur alors, en termes de l'équation non autonôme donné par F, c'est le champ $(t, x) \mapsto (1, F(t, x))$. Donc pour toute solution $\vec{x}$, on trouve au point $(t, \vec{x})$ un vecteur $(1, \vec{x}'(t))$ qui est bien tangent au graphe de $\vec{x}$.

3 Barrières

On considère une équation différentielle

$$x' = F(t, x) \tag{3.1}$$

où $F : I \times U \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque.

3.1 Définition. Une *sur-solution* (resp. *sous-solution*) pour cette équation différentielle est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie $y'(t) \geq F(t, y(t))$ (resp. $y'(t) \leq F(t, y(t))$) pour tout $t \in I$. Elle est *stricte* si l'inégalité est stricte pour tout $t \in I$.

3.2 Remarque. Une solution est à la fois une sous-solution et une sur-solution (non stricte).

3.3 Proposition. *Soient x une solution sur I de* (3.1) *et y une sous-solution (resp. z une sur-solution) stricte.*

1. *S'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) \leq x(t_0)$ (resp. $x(t_0) \leq z(t_0)$) alors pour tout $t > t_0$, $t \in I$, on a $y(t) < x(t)$ (resp. $x(t) < z(t)$).*
2. *S'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) \leq y(t_0)$ (resp. $z(t_0) \leq x(t_0)$) alors pour tout $t < t_0$, $t \in I$, on a $x(t) < y(t)$ (resp. $z(t) < x(t)$).*

3.4 Proposition. Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz*, soient x une solution sur I de* (3.1) *et y une sous-solution (resp. z une sur-solution) qu'on suppose $\mathcal{C}^1$.*

1. *S'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) < x(t_0)$ (resp. $x(t_0) < z(t_0)$) alors pour tout $t > t_0$, $t \in I$, on a $y(t) < x(t)$ (resp. $x(t) < z(t)$). De même avec des inégalités larges dans les hypothèses et la conclusion.*
2. *S'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) < y(t_0)$ (resp. $z(t_0) < x(t_0)$) alors pour tout $t < t_0$, $t \in I$, on a $x(t) < y(t)$ (resp. $z(t) < x(t)$). De même avec des inégalités larges dans les hypothèses et la conclusion.*

3.5 Remarque. La conclusion de la proposition 3.4 dans le cas large implique l'unicité de Cauchy-Lipschitz, puisqu'une solution est une sous-solution et une sur-solution. On ne peut donc espérer trop affaiblir ces hypothèses.

3.6 Remarque. Quand la conclusion des propositions 3.3 ou 3.4 vaut, on dit souvent que y et z sont des barrières. Elles peuvent être franchies dans un sens mais pas dans l'autre.

3.7 Définition. Étant donné une barrière inférieure y et une barrière supérieure z avec $y \leq z$, la région du plan $\{(t, x),\ y(t) \leq x \leq z(t)\}$ est appelée *piège* ou *entonnoir* pour l'équation différentielle.

Par la proposition 3.3, toute solution qui pénètre dans un piège y reste. Attention, cette région peut être vide (si $z \leq y$).

3.8 Définition. Étant donné une barrière inférieure y et une barrière supérieure z, avec $z \leq y$, la région du plan $\{(t, x),\ z(t) \leq x \leq y(t)\}$ est appelée *anti-piège* ou *anti-entonnoir* pour l'équation différentielle.

Les solutions ont plutôt tendance à sortir (dans le futur) des anti-pièges.
On a toutefois :

3.9 Théorème. *Soit f satisfaisant aux hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $y \leq z$ un entonnoir. Alors il existe au moins une solution globale (définie sur I tout entier) de l'équation différentielle qui est dans l'entonnoir.*