II. Groupe de Galois

Baptiste Calmès

7 mai 2017

Table des matières

1 Groupe de Galois **2**

2 Plongements **2**

3 Permutations de racines **3**

4 Correspondance **3**

5 Extensions classiques **5**

1 Groupe de Galois

1.1 Définition (Groupe de Galois)**.** Soit L/K une extension. On appelle *groupe de Galois* de l'extension L/K le groupe des automorphismes de L laissant K fixe, autrement dit le groupe des automorphismes de la K-algèbre L. On le note $\mathrm{Gal}(L/K)$.

2 Plongements

Soient L et M deux extensions de K. Notons $\mathrm{Hom}_K(L, M)$ l'ensemble des morphismes d'extensions (i.e. de K-algèbres) de L vers M. Par exemple $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Hom}_K(L, L)$. Lorsqu'on veut insister sur les morphismes $\phi : K \hookrightarrow L$ et $\psi : K \hookrightarrow M$ qui donnent les extensions, on écrit $\mathrm{Hom}_K({}_\phi L, {}_\psi M)$.

Dans cette partie, $\omega : K \hookrightarrow \Omega$ est une clôture algébrique de K.

2.1 Lemme. *Soit $\phi : K \hookrightarrow L$ une extension algébrique. Le nombre $\#\mathrm{Hom}_K({}_\phi L, {}_\omega \Omega)$ ne dépend pas du choix de la clôture algébrique $\omega : K \hookrightarrow \Omega$.*

2.2 Remarque. À ce stade, rien ne dit que ce nombre est fini. Mais nous allons voir que lorsque L/K est finie, il l'est.

2.3 Définition. On le nomme degré séparable de L/K et on le note $[L : K]_s$.

2.4 Lemme. *Si M/L et L/K sont deux extensions algébriques, alors $[M : L]_s[L : K]_s = [M : K]_s$.*

2.5 Lemme. *Si l'extension L/K est de la forme $L = K[a]$ pour un certain $a \in L$ de polynôme minimal P, alors $[L : K]_s$ est égal au nombre de racines (distinctes) de P dans Ω. En particulier $[L : K]_s \leq [L : K] = \deg(P)$ et on a égalité si et seulement si a (i.e. P) est séparable.*

2.6 Proposition. *Pour toute extension finie L/K, on a les inégalités*

$$1 \leq \#\mathrm{Gal}(L/K) \leq [L : K]_s \leq [L : K]$$

2.7 Théorème. *Soit L/K une extension finie. L'extension L/K est séparable si et seulement si $[L : K]_s = [L : K]$.*

2.8 Remarque. Cela implique en particulier le fait non trivial que si un élément a est séparable sur K, alors tous les éléments dans $K[a]$ sont également séparables.

2.9 Lemme. *Une extension L/K finie est normale si et seulement si tous les éléments de $\mathrm{Hom}_K(L, \Omega)$ ont la même image dans Ω.*

2.10 Corollaire. *Une extension finie L/K est normale si et seulement si pour toute extension finie M/K, tous les morphismes d'extensions $L \to M$ ont même image.*

2.11 Corollaire. *Soit L/K une extension normale. Alors tout automorphisme de K s'étend en un automorphisme de L.*

2.12 Théorème. *Soit L/K une extension finie. L'extension L/K est normale si et seulement si $\#\mathrm{Gal}(L/K) = [L : K]_s$.*

2.13 Théorème. *L'extension finie L/K est galoisienne si et seulement si $\#\mathrm{Gal}(L/K) = [L : K]$.*

Revenons maintenant sur les extensions séparables et galoisiennes, et prouvons quelques résultats manquants.

2.14 Lemme. *Une extension de la forme $L \simeq K[X]/(P)$ est séparable si et seulement si P est à racines simples (dans une clôture algébrique).*

2.15 Proposition. *Soient M/L et L/K des extensions algébriques. Alors M/K est séparable si et seulement si M/L et L/K le sont.*

2.16 Proposition. *Une extension de décomposition d'un polynôme à racines simples est séparable.*

2.17 Proposition. *Soit P un polynôme irréductible de $K[X]$ et L/K une extension de décomposition de P. Alors P est à racines simples (dans toute extension, ou de manière équivalente dans L ou encore dans une clôture algébrique) si et seulement si L/K est séparable (donc galoisienne).*

2.18 Théorème. *Une extension est finie et galoisienne si et seulement si c'est une extension de décomposition d'un polynôme à racines simples.*

3 Groupe de Galois et permutations de racines

Soit $P \in K[X]$ un polynôme, et soit L/K une extension. Notons $\mathcal{Z}(P, L)$ l'ensemble des racines de P (dans L), et $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(P,L)}$ le groupe symétrique des permutations de ces racines. Bien entendu, si on numérote ces racines $z_1, \ldots, z_n$, cela fournit un isomorphisme à $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(P)} \simeq \mathcal{S}_n$.

Tout élément de $\mathrm{Gal}(L/K)$ envoie $\mathcal{Z}(P)$ dans lui-même. Cela définit donc une action canonique de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur $\mathcal{Z}(P, L)$ ou de manière équivalente une application canonique $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(P,L)}$.

3.1 Lemme. *Si L est un corps de décomposition de P, cette application est injective.*

3.2 Remarque. Si le polynôme est à racines simples et L/K en est une extension de décomposition, alors L/K est galoisienne par le théorème 2.18, et nous savons que son groupe de Galois est de cardinal $[L : K]$ par le théorème 2.13. Par contre, $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(P,L)}$ peut être beaucoup plus gros. Si le polynôme est irréductible et n'est pas à racines simples (et donc l'extension de décomposition L n'est pas séparable), alors son groupe de Galois est encore plus petit, de cardinal $< [L : K]$.

3.3 Lemme. *Soit L/K une extension de décomposition de P. Le groupe de Galois agit transitivement sur $\mathcal{Z}(P, L)$ si et seulement si P est une puissance d'un polynôme irréductible (fois un inversible). En particulier, si une racine est de multipicité 1, elles le sont toutes, et P est irréductible.*

3.4 Lemme. *Soit P un polynôme irréductible dans $K[X]$. Notons L l'extension $K[X]/(P)$. Alors l'application $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathcal{Z}(P, L)$ envoyant σ sur $\sigma(X)$ est une bijection.*

3.5 Remarque. Attention, cette application n'est pas un morphisme de groupes, puisque $\mathcal{Z}(P, L)$ n'est pas un groupe. Mais cela donne une idée du cardinal de $\mathrm{Gal}(L/K)$. En particulier, cela confirme que si P a une racine double, ou bien n'a pas toutes ses racines dans L, alors $\#\mathrm{Gal}(L/K) = \#\mathcal{Z}(P, L) < \deg(P) = [L : K]$ puisqu'elle n'est pas séparable, ou bien n'est pas normale.

3.6 Remarque. Si $L = K[X]/(P)$ est normale, autrement dit si toutes les racines de P sur L s'expriment en fonction de X, et qu'on a trouvé ces expressions en pratique, alors cela permet de déterminer à la main le groupe de Galois de L/K comme sous groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(P,L)}$.

4 Correspondance de Galois

Nous allons maintenant aborder le théorème le plus emblématique de la théorie de Galois, qui clarifie le lien entre les extensions finies et les groupes finis.

Si G est un sous-groupe des automorphismes d'un corps L, notons L^G l'ensemble des éléments de L qui sont fixes par tout élément de G. En particulier, si G est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/K)$ pour une extension L/K, alors L^G/K est une sous-extension de L/K.

4.1 Lemme. *L'ensemble L^G est un sous-corps de L, contenant (l'image de) K dans le cas où G est un sous-groupe de* $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Dans cette situation, nous pouvons donc considérer la sous-extension L^G/K ou bien l'extension L/L^G.

4.2 Lemme. *Si G est fini, alors L/L^G est algébrique, séparable, et pour tout $x \in L$, le polynôme minimal de x sur L^G est de degré inférieur ou égal à $\#G$.*

Remarquons maintenant que G est naturellement un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/L^G)$.

4.3 Théorème (Artin)**.** *Soit L un corps, et G un sous-groupe fini des automorphismes de L. Alors L^G est un sous-corps de L, l'extension L/L^G est galoisienne de degré $[L : L^G] = \#G$, et $\mathrm{Gal}(L/L^G) = G$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat central. Soit L/K une extension galoisienne finie.

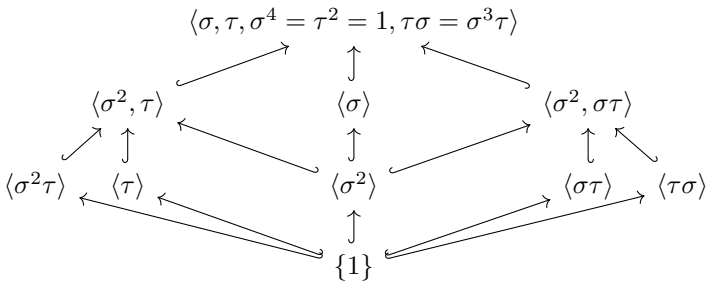
Nous avons vu qu'à un sous-groupe G de $\mathrm{Gal}(L/K)$, on peut associer un sous-corps L^G de L contenant (l'image de) K. Dans l'autre sens, à toute sous-corps F de L contenant K, on associe le sous-groupe $\mathrm{Gal}(L/F)$ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ des éléments laissant tout élément de F fixe. Cette extension L/F est galoisienne (finie).

4.4 Théorème (correspondance de Galois)**.** *Les applications*

$$\begin{array}{ccc} G & \longmapsto & L^G \\ \{\textit{sous-groupes de } \mathrm{Gal}(L/K)\} & \rightleftarrows & \left\{ \begin{array}{c} \textit{sous-corps de } L \\ \textit{contenant (l'image de) } K \end{array} \right\} \\ \mathrm{Gal}(L/F) & \longmapsfrom & F \end{array}$$

sont des bijections décroissantes inverses l'une de l'autre (quand on ordonne aussi bien les sous-groupes que les sous-extensions par inclusion).

FIGURE 1 – Réseau des sous-groupes de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q})$



4.5 Corollaire. *Une extension finie séparable n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.*

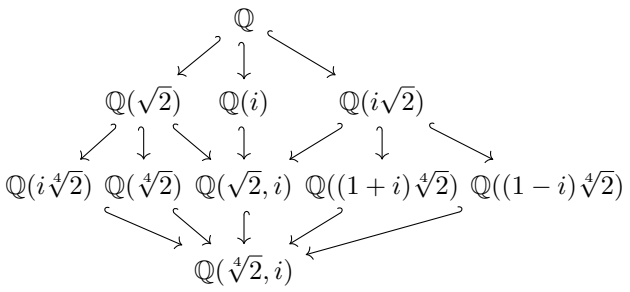
Il est possible de préciser certaines choses dans la correspondance 4.4. Par exemple, on peut se demander s'il est possible d'obtenir des informations sur l'extension L^G/L et son groupe d'automorphismes. La réponse est oui.

4.6 Lemme. *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/K)$ et soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Alors $\sigma(L^G) = L^{\sigma G \sigma^{-1}}$ et G est normal dans $\mathrm{Gal}(L/K)$ si et seulement si tout élément de $\mathrm{Gal}(L/K)$ envoie L^G dans lui-même.*

4.7 Corollaire. *Par la bijection 4.4, les sous-groupes normaux de $\mathrm{Gal}(L/K)$ correspondent aux sous-corps F de L tels que l'extension F/K est normale (donc galoisienne).*

Soit $\mathrm{N}_{\mathrm{Gal}(L/K)}(G)$ le normalisateur de G dans $\mathrm{Gal}(L/K)$. Tout élément σ dedans vérifie donc $\sigma(L^G) = L^G$ et induit ainsi par restriction un élément de $\mathrm{Gal}(L^G/K)$. De plus, il agit trivialement sur L^G exactement quand il est dans $G = \mathrm{Gal}(L/L^G)$.

FIGURE 2 – Réseau des sous-extensions de $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$



4.8 Théorème. *La restriction à L^G induit une application surjective*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Gal}(L/K)}(G) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L^G/K)$$

dont le noyau est $G = \mathrm{Gal}(L/L^G)$. En particulier, si G est normal, alors on a une surjection

$$\mathrm{Gal}(L/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L^G/K)$$

de noyau $\mathrm{Gal}(L/L^G)$.

5 Quelques familles d'extensions classiques

Intéressons-nous maintenant à une famille d'extensions fortement liée aux groupes abéliens. Il s'agit des extensions *cyclotomiques*. Notons μ_n le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ des racines n-ièmes de l'unité. Donc

$$\mu_n = \{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{2\frac{2i\pi}{n}}, e^{3\frac{2i\pi}{n}}, \cdots, e^{(n-1)\frac{2i\pi}{n}}\}.$$

Nous utiliserons également la fonction ϕ d'Euler, définie par

$$\phi(n) = \#\{d \in \mathbb{N}, \text{ tel que } 0 < d < n \text{ et } (d, n) = 1\} = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

5.1 Définition. Une racine $\xi \in \mu_n$ est dite *primitive* si elle engendre le groupe μ_n, autrement dit, si le sous-groupe de μ_n qu'elle engendre est μ_n tout entier. Dans la liste ci-dessus, les racines primitives n-ièmes sont les $e^{k\frac{2i\pi}{n}}$ avec $(k, n) = 1$. On note μ_n^{prim} le sous-ensemble de μ_n formé des racines primitives de l'unité.

5.2 Lemme. *On a*

$$\textit{et en particulier} \quad \mu_n = \bigsqcup_{d|n} \mu_d^{prim}.$$

5.3 Définition. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Le polynôme

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{\xi \in \mu_n \\ \xi \text{ primitive}}} (X - \xi) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ (k,n)=1}} (X - e^{k\frac{2i\pi}{n}})$$

est appelé n-ième polynôme cyclotomique. Il est donc de degré $\phi(n)$.

5.4 Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, le polynôme Φ_n est unitaire et à coefficients entiers, i.e. $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$. Il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On a également*

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X) \tag{5.1}$$

ce qui en donne donc une décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$. De plus, si p est un nombre premier, on a

$$\Phi_p(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}. \tag{5.2}$$

Voici les premiers polynômes cyclotomiques. On les calcule par récurrence en utilisant (5.1).

$$\begin{aligned}
\Phi_1(X) &= X - 1 \\
\Phi_2(X) &= X + 1 \\
\Phi_3(X) &= X^2 + X + 1 \\
\Phi_4(X) &= X^2 + 1 \\
\Phi_5(X) &= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\
\Phi_6(X) &= X^2 - X + 1 \\
\Phi_7(X) &= X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\
\Phi_8(X) &= X^4 + 1 \\
\Phi_9(X) &= X^6 + X^3 + 1 \\
\Phi_{10}(X) &= X^4 - X^3 + X^2 - X + 1 \\
\Phi_{11}(X) &= X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\
\Phi_{12}(X) &= X^4 - X^2 + 1
\end{aligned}$$

5.5 Lemme. *Soient $\xi, \zeta \in \mu_n^{prim}$. Alors $\mathbb{Q}[\xi]$ et $\mathbb{Q}[\zeta]$ sont le même sous-corps $\mathbb{Q}[\mu_n]$ de $\mathbb{C}$, par ailleurs isomorphe à $\mathbb{Q}[X]/(\Phi_n)$.*

5.6 Définition. Soit $n \in \mathbb{N} \subseteq \{0\}$. On appelle *$n$-ième corps cyclotomique* le sous-corps $\mathbb{Q}[\mu_n]$ de $\mathbb{C}$ (donc égal à $\mathbb{Q}[\xi]$ pour n'importe quel $\xi \in \mu_n^{\text{prim}}$).

Soit ξ une racine primitive n-ième de l'unité. Pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}[\mu_n]/\mathbb{Q})$, l'élément $\sigma(\xi) \in \mu_n^{\text{prim}}$ et est donc de la forme ξ^k avec $(k, n) = 1$, et k bien défini à un multiple de n près, autrement dit avec k inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5.7 Théorème. *L'application qui envoie σ sur la classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $\sigma(\xi) = \xi^k$ définit un isomorphisme de groupes*

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}[\mu_n]/\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*.$$

canonique (indépendant du choix de $\xi \in \mu_n$). Le groupe $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\xi]/\mathbb{Q})$ *est donc abélien et d'ordre $\phi(n)$ (fonction d'Euler).*

Passons maintenant aux extensions radicales plus générales, c'est-à-dire celles où l'on rajoute des racines n-ièmes d'éléments a. Une des idées maîtresses de Galois est d'avoir fait le lien entre ce type d'extensions et la cyclicité des groupes de Galois.

5.8 Définition. Une extension finie L/K est dite *radicale élémentaire* s'il existe un élément $x \in L$ tel que $L = K[x]$ et $x^n \in K$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Elle est dite *radicale* (tout court) si elle peut s'obtenir comme une composition finie d'extension radicales élémentaires.

5.9 Remarque. En général, une telle extension n'est pas normale, comme on peut le voir pour $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Mais elle le devient si on suppose que K contient toutes les racines de l'unité, i.e. celles de $X^n - 1$ que nous avons étudié précédemment.

Nous ferons donc cette hypothèse par la suite. Par ailleurs, nous nous restreignons à la caractéristique 0 car cela suffit à exposer les idées principales, mais le même type de résultat existe en caractéristique $p > 0$ et n'est pas plus compliqué.

Soit K un corps de car nulle et tel que $\#\mu_n(K) = n$ et soit $a \in K^*$. Soit L/K une extension de décomposition de $X^n - a$, et soit α une racine dans L.

5.10 Théorème. *L'extension L/K est galoisienne et l'application qui envoie σ sur $\sigma(\alpha)/\alpha$ définit un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Gal}(L/K) \to \mu_d$$

où d est le plus petit entier non nul tel que $\alpha^d \in K$. Cet isomorphisme est canonique (indépendant du choix de α).

5.11 Corollaire. *Avec les notations du théorème, le polynôme $X^n - a$ est irréductible sur K si et seulement si $d = n$, si et seulement si $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mu_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Plus surprenant, il y a une réciproque.

5.12 Théorème. *Soit K un corps de caractéristique nulle et tel que $\#(\mu_n(K)) = n$, et soit L/K une extension galoisienne finie telle que $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors, il existe $a \in K$ tel que L soit une extension de décomposition de $X^n - a$.*