Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 1–6

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des nombres/Géométrie algébrique

Le groupe SK_2 d'une algèbre de biquaternions

Baptiste Calmès

Équipe de topologie et géométrie algébriques, Université Paris 7, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 7 décembre 2002 ; accepté après révision le 20 mai 2003

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

L'objet de cette Note est de décrire les grandes lignes de la démonstration de l'exactitude d'une suite qui relie le groupe SK_2 (noyau de la norme réduite) d'une algèbre de biquaternions sur un corps F au groupe de cohomologie galoisienne $H^5(F, \mathbf{Z}/2)$. Cette suite est obtenue en utilisant certaines suites spectrales en cohomologie motivique ainsi que le calcul d'une partie de la filtration topologique d'une quadrique d'Albert. ***Pour citer cet article : B. Calmès, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

The group SK_2 of a biquaternion algebra. In this Note, I will sketch the proof that a sequence relating the group SK_2 (kernel of the reduced norm) of a biquaternion algebra over a field F and the Galois cohomology group $H^5(F, \mathbf{Z}/2)$ is exact. The main steps of the proof contain computations in spectral sequences for motivic cohomology and in the topological filtration of an Albert quadric. ***To cite this article: B. Calmès, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Nearly all the results stated in this Note are proved in [2] and all of them will be detailed in a forthcoming article.

Let F be a field of characteristic zero. Let q be an Albert quadratic form and D the associated biquaternion algebra. Let q' be a codimension 1 subform of q. Let X_q be the projective quadric defined by the equation $q = 0$ and $F(q)$ be its function field. Let $H^p(X, \mathcal{K}_q)$ be the cohomology of the Gersten complex.

The main theorem stated in this note is Theorem 1.1: when F contains an algebraically closed subfield, there is an exact sequence (1) where $N_{q'} : H^3(X_{q'}, \mathcal{K}_5) \to K_2F$ is the usual norm map (see [7]) and SK_2 is the kernel of the reduced norm for K_2 (see [8], p. 24, Corollary 5.7).

The proof of this theorem is divided in three steps.

The first step is a computation in two spectral sequences: the coniveau spectral sequence for étale motivic cohomology and a "weight" spectral sequence in étale motivic cohomology. It enables us to relate K-cohomology

Adresse e-mail : calmes@math.jussieu.fr (B. Calmès).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00261-9

with Galois cohomology. When F contains an algebraically closed subfield, we get an isomorphism

$$\ker\bigl(H^2(X_q,\mathcal{K}_4)\longrightarrow H^2\bigl((X_q)_{F(Y)},\mathcal{K}_4\bigr)\bigr)\longrightarrow \ker\bigl(H^5(F,\mathbf{Z}/2)\longrightarrow H^5\bigl(F(q),\mathbf{Z}/2\bigr)\bigr),$$

where Y is the Severi–Brauer variety of D.

The second step deals with the description made by Panin in [6] of the K-theory of projective homogeneous varieties, as copies of the K-theory of central simple algebras associated to algebraic groups. We show that X_q is isomorphic to the generalised Severi–Brauer variety $SB(2,D)$. This enables us to compute part of the topological filtration of this quadric. In fact, using Panin's description, we compute some levels of the topological filtration in terms of groups involving the K-theory groups of the ground field F and the K-theory groups of the algebra D. Among others, we compute $K_1X_q^{(4)}$ using some of the results in [3].

In the last step, we show that the groups $H^2(X_q,\mathcal{K}_4)$ and $K_2(X_q)^{(2/3)}$ are isomorphic. The computations of step 2 then yield the exact sequence $SK_2D\to H^5(F,\mathbf{Z}/2)\to H^5(F(q),\mathbf{Z}/2)$ by a diagram chase. As in [5], using a codimension one subform q' of q, one can show that there is a surjective morphism $\ker N_{q'}\to\ker(SK_2D\to H^5(F,\mathbf{Z}/2))$ hence the exact sequence (1).

1. Introduction

La plupart des résultats annoncés dans cette note sont démontrés en détail dans ma thèse de doctorat [2] et tous feront l'objet d'une publication ultérieure.

Dans tout ce texte, F désigne un corps de caractéristique nulle, $q=\langle a,b,-ab,-c,-d,cd\rangle$ une forme quadratique d'Albert et

$$D=\begin{pmatrix} a\ b\\ F\end{pmatrix}\otimes_F\begin{pmatrix} c\ d\\ F\end{pmatrix}$$

l'algèbre de biquaternions qui lui est associée.

Si X est un schéma intègre sur un corps k, on note $k(X)$ le corps des fonctions de X. La quadrique projective d'équation $q=0$ est désignée par X_q, et son corps des fonctions par $F(q)$.

Les groupes de K-cohomologie (cohomologie du complexe de Gersten) de X sont notés $H^p(X,\mathcal{K}_q)$ et la notation $H^i(F,\mathbf{Z}/n)$ désigne le i-ème groupe de cohomologie galoisienne de F à valeurs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

La notation SK_2 désigne le noyau de la norme réduite pour K_2 d'une algèbre centrale simple, telle qu'elle a été définie dans [8], p. 24, Corollaire 5.7.

Le principal résultat annoncé dans cette Note est le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Lorsque F contient un sous-corps algébriquement clos, on a une suite exacte*

$$\ker N_{q'}\longrightarrow SK_2D\longrightarrow H^5(F,\mathbf{Z}/2)\longrightarrow H^5\bigl(F(q),\mathbf{Z}/2\bigr).\tag{1}$$

Sa démonstration s'articule comme suit.

2. Calculs de cohomologie motivique

Le but de cette section est d'exposer le principe de la démonstration du théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit q' une forme quadratique d'Albert ou une sous-forme de codimension* 1 *d'une telle forme. Soit Y la variété de Severi–Brauer de D. Lorsque F contient un sous-corps algébriquement clos, on a un isomorphisme*

$$\ker\bigl(H^2(X_{q'},\mathcal{K}_4)\longrightarrow H^2\bigl((X_{q'})_{F(Y)},\mathcal{K}_4\bigr)\bigr)\longrightarrow \ker\bigl(H^5(F,\mathbf{Z}/2)\longrightarrow H^5\bigl(F(q'),\mathbf{Z}/2\bigr)\bigr).$$

La démonstration de ce théorème utilise principalement deux suites spectrales : la suite spectrale de coniveau en cohomologie motivique étale ([4], p. 161), une suite spectrale « des poids » en cohomologie motivique étale [4].

La première étape consiste à obtenir la suite exacte (après localisation en 2)

$$0 \longrightarrow H^5_{\text{ét}}\big(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)\big) \longrightarrow H^6_{\text{ét}}\big(X, \mathbf{Z}(4)\big) \longrightarrow K_2(F) \oplus K_2(F).$$

Elle s'obtient par calcul dans la suite spectrale « des poids » en poids 4. L'existence d'un sous-corps de F algébriquement clos permet d'obtenir la nullité d'une différentielle ($d_3^{3,2}$) par le fait que $K_3(F)_{\text{ind}}$ est alors divisible. La nullité de certains termes utilise la conjecture de Milnor (montrée dans [10]).

Dans une deuxième étape, on obtient la suite exacte (après localisation en 2)

$$0 \longrightarrow H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^6_{\text{ét}}\big(X, \mathbf{Z}(4)\big) \longrightarrow H^5_{\text{ét}}\big(F(q), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)\big).$$

Elle résulte d'un calcul dans la suite spectrale de coniveau en cohomologie motivique étale en poids 4. Cela utilise également la conjecture de Milnor.

En croisant ces deux suites exactes qui ont le terme du milieu en commun, puis en effectuant une chasse au diagramme, on obtient les morphismes ξ et η et l'isomorphisme

$$\ker\big(H^5_{\text{ét}}\big(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)\big) \xrightarrow{\eta} H^5_{\text{ét}}\big(F(q), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)\big)\big) \simeq \ker\big(H^2(X, \mathcal{K}_4) \xrightarrow{\xi} K_2(F) \oplus K_2(F)\big).$$

Le morphisme d'extension des scalaires de $K_2(F)$ vers $K_2(F(Y))$ est injectif ([8], §5), et $\ker \xi_{F(Y)} = 0$ (par trivialité de la suite exacte dans le cas déployé), ce qui permet d'identifier

$$\ker \xi = \ker\big(H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^2(X_{F(Y)}, \mathcal{K}_4)\big).$$

Enfin, tous ces groupes sont de 2-torsion par un argument de transfert, d'où

$$\ker\big(H^5_{\text{ét}}\big(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)\big) \longrightarrow H^5_{\text{ét}}\big(F(q), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)\big)\big) \simeq \ker\big(H^5_{\text{ét}}\big(F, \mathbf{Z}/2(4)\big) \longrightarrow H^5_{\text{ét}}\big(F(q), \mathbf{Z}/2(4)\big)\big).$$

Cela donne le Théorème 2.1.

3. K-théorie des quadriques et variétés de Severi–Brauer

Dans [6], Panin donne la description de la K-théorie des variétés projectives homogènes en fonction de la K-théorie d'algèbres de Tits naturellement associées aux groupes algébriques dont ces variétés sont des quotients. Nous allons nous servir d'une telle description dans le cas d'une quadrique d'Albert, qui est en fait isomorphe à la variété de Severi–Brauer généralisée $SB(2, D)$ (voir [1]) d'une algèbre de biquaternions. Le but de cette section est de montrer comment s'explicite la construction de Panin dans ce cas particulier.

Soit h la forme quadratique hyperbolique $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. La quadrique projective X_h d'équation $h = 0$ s'obtient également comme quotient du groupe algébrique $G_1 = \mathrm{Spin}(h)$ par le sous-groupe parabolique P_1, fixateur du point projectif $(1 : 0 : \ldots : 0)$ par l'action de $\mathrm{Spin}(h)$ sur X_h par l'intermédiaire du groupe orthogonal.

Soit V un espace vectoriel sur F de dimension 4. La grassmannienne $Gr(2, V)$ s'obtient comme quotient du groupe algébrique $G_2 = SL(V)$ par un sous-groupe parabolique P_2 qui laisse globalement stable un plan.

Soit $W = \Lambda_2 V$, muni de la forme quadratique induite par le déterminant $\Lambda_2 V \times \Lambda_2 V \to \Lambda_4 V \simeq F$. Celle-ci est hyperbolique, et l'isomorphisme classique entre $SL(V)$ et $\mathrm{Spin}(\mathrm{W}) = \mathrm{Spin}(h)$ envoie bien le sous-groupe parabolique P_1 sur un sous-groupe parabolique P_2 qui laisse stable un plan. Cela induit donc un isomorphisme entre les variétés quotient $Gr(2, V) \simeq X_h$.

La quadrique d'Albert X_q est une forme de la quadrique hyperbolique X_h (tordue par un cocycle à valeurs dans $SO(h)$). La variété de Severi–Brauer $SB(2, D)$ est une forme de la grassmannienne $Gr(2, V)$ (tordue par un cocycle à valeurs dans $PGL(V)$). Un calcul cohomologique montre que ces cocycles se correspondent par l'isomorphisme $SL(V) \simeq \mathrm{Spin}(h)$, et ce dernier induit donc un isomorphisme f de $SB(2, D)$ vers X_q.

La construction de Panin fournit alors une description de la K-théorie de X_q ainsi que de celle de $SB(2, D)$. Plus précisément, on obtient des morphismes $\sum_\alpha \varphi_\alpha : \bigoplus K_*(D^{\otimes|\alpha|}) \xrightarrow{\sim} K_*(SB(2, D))$ où α parcourt les couples $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ et $(2, 2)$ et $|\alpha|$ designe la somme des deux coordonnées de α. De la même manière,

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_- + \varphi_+ : K_*(F) \oplus K_*(F) \oplus K_*(F) \oplus K_*(F) \oplus K_*(D) \oplus K_*(D) \xrightarrow{\sim} K_*(X_q).$$

Un calcul qui utilise principalement la mise en correspondance par l'isomorphisme f des anneaux des représentations de P_1 et P_2 et la fonctorialité de la construction de Panin permet d'obtenir le « changement de base »

$$\begin{aligned}
&f^*\varphi_0(x) = \varphi_{0,0}(x),\\
&f^*\varphi_1(x) = \varphi_{1,1}(x),\\
&f^*\varphi_2(x) = \varphi_{2,2}(x),\\
&f^*\varphi_3(x) = \varphi_{2,0}\big(\mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x)\big) - \varphi_{2,1}\big(\mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x)\big) + 6\varphi_{2,2}\big(\mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x)\big),\\
&f^*\varphi_+(x) = \varphi_{1,0}(x),\\
&f^*\varphi_-(x) = \varphi_{1,1}\big(\mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}}(x)\big) - \varphi_{2,1}(x),\\
&\big(f^{-1}\big)^*\varphi_{0,0}(x) = \varphi_0(x),\\
&\big(f^{-1}\big)^*\varphi_{1,0}(x) = \varphi_+(x),\\
&\big(f^{-1}\big)^*\varphi_{1,1}(x) = \varphi_1(x),\\
&\big(f^{-1}\big)^*\varphi_{2,0}(x) = 16\varphi_1(x) - 6\varphi_2\big(\mathrm{M}_{D^{\otimes 2},D^{\otimes 4}}(x)\big) + \varphi_3\big(\mathrm{M}_{D^{\otimes 2},D^{\otimes 6}}(x)\big) - \varphi_-\big(\mathrm{I}_{D^{\otimes 2},D^{\otimes 3}}(x)\big),\\
&\big(f^{-1}\big)^*\varphi_{2,1}(x) = \varphi_1\big(\mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}}(x)\big) - \varphi_-(x),\\
&\big(f^{-1}\big)^*\varphi_{2,2}(x) = \varphi_2(x),
\end{aligned}$$

où le morphisme Res désigne la restriction en K-théorie et le morphisme M celui d'invariance de Morita entre la K-théorie de deux algèbres équivalentes au sens de Brauer (notamment, $D^{\otimes i}$ et $D^{\otimes i+2}$ sont équivalentes).

4. Filtration topologique

Cette étape consiste à calculer autant que possible la filtration topologique de la quadrique sur la décomposition de Panin. Ce calcul se fait essentiellement en se ramenant par extension des scalaires au cas déployé, dans lequel la filtration topologique est triviale et engendrée par des cup-produits par des éléments de K_0 dont on connait la codimension du support. Pour K_0 et K_1, à l'exception de $K_1X_q^4$, la filtration topologique est déjà calculée dans [5] sur une décomposition analogue à celle de Panin (voir [9]). On commence par se donner une nouvelle décomposition compatible avec la filtration topologique, obtenue à partir de morphismes qui utilisent la norme réduite qui n'est définie que pour K_0, K_1 et K_2. On note $K_iX^{(j)}$ le j-ème groupe de la filtration topologique de K_iX, et $K_iX^{(j/j+1)} = K_iX^{(j)}/K_iX^{(j+1)}$.

Définition 4.1. Pour $i = 0$, 1 ou 2, on définit les morphismes

$$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 : K_iF \longrightarrow K_iX_q$$

par

$$\begin{aligned}
&\Psi_0 = \varphi_0,\\
&\Psi_1 = \varphi_0 - \varphi_1 \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}},
\end{aligned}$$

$$\Psi_2 = \varphi_0 - 2\varphi_1 \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} + \varphi_2 \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}},$$
$$\Psi_3 = \varphi_0 - 3\varphi_1 \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} + 3\varphi_2 \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}} - \varphi_3 \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}$$

et

$$\Psi_2', \Psi_2'', \Psi_3' : K_i D \longrightarrow K_i X_q$$

par

$$\Psi_2' = \varphi_0 \circ \mathrm{Nrd} + \varphi_1 \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd} - \varphi_+,$$
$$\Psi_2'' = \varphi_0 \circ \mathrm{Nrd} + \varphi_1 \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd} - \varphi_- \circ \mathrm{M}_{D,D^{\otimes 3}},$$
$$\Psi_3' = \Psi_2' + \Psi_2'' - \Psi_2 \circ \mathrm{Nrd}.$$

Dans le cas déployé ($D \simeq M_4(F)$), ces morphismes peuvent s'obtenir comme des cup-produits par des éléments de K_0. Plus précisément, pour $i = 0$, 1 ou 2 et pour tout $k \in K_i F$, on a

$$\begin{aligned}
&\Psi_0(k) = k.\mathcal{I}, && \Psi_2' \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) = k.\mathcal{P}_1,\\
&\Psi_1(k) = k.\mathcal{H} && \Psi_2'' \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) = k.\mathcal{P}_2,\\
&\Psi_2(k) = k.\mathcal{H}^2, && \Psi_3(k) = k.\mathcal{H}^3,\\
& && \Psi_3' \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) = k.\mathcal{D},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{I}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{D}$ désignent respectivement la classe dans $K_0 X_q$ de $\mathcal{O}_{X_q}$, du faisceau structural d'un hyperplan (de $\mathbf{P}^5$ intersecté avec la quadrique), des faisceaux structuraux de deux plans qui ne sont pas équivalents et d'une droite. C'est essentiellement pour obtenir les égalités précédentes que l'isomorphisme entre X_q et $SB(2, D)$ décrit précédemment est utilisé.

On peut alors montrer (principalement par réduction au cas déployé) que ces morphismes vérifient

Proposition 4.2. *Pour $i = 0$, 1 ou 2 les morphismes*

$$\Psi_1 \oplus \Psi_2 \oplus \Psi_3 \oplus \Psi_2' \oplus \Psi_2'' : K_i F^{\oplus 3} \oplus K_i D^{\oplus 2} \longrightarrow K_i X_q^{(1)}$$

et

$$\Psi_2 \oplus \Psi_3 \oplus \Psi_2' \oplus \Psi_2'' : K_i F^{\oplus 2} \oplus K_i D^{\oplus 2} \longrightarrow K_i X_q^{(2)}$$

sont des isomorphismes. De plus, Ψ_3 et Ψ_3' arrivent dans $K_i X_q^{(3)}$.

Remarque 1. Dans [2], je n'avais par remarqué que Ψ_3' s'obtient comme un cup-produit $\mathcal{H}.\Psi_2'$, et qu'il arrive donc entièrement dans $K_i X_q^{(3)}$, même pour $i = 2$. Cela explique pourquoi la suite exacte démontrée dans [2] contient un terme supplémentaire qui n'était pas nécessaire.

Un autre calcul nécessaire par la suite est celui de $K_1 X_q^{(4)}$.

Proposition 4.3. *$K_1 X_q^{(4)}$ est isomorphe au noyau de l'application de $K_1 D \oplus K_1 F$ vers $K_1 F$ qui envoie (d, f) sur* $\mathrm{Nrd}(d) - 2f$ (*avec une notation additive pour les groupes de K-théorie*).

Cette proposition est une conséquence de la construction de Chernousov et Merkurjev dans [3] qui fournit un isomorphisme du groupe de Clifford Spécial de q quotienté par son sous-groupe de R-équivalence vers $H^4(X_q, \mathcal{K}_5)$. Le groupe de Clifford spécial et sa R-équivalence sont connues dans le cas de q, ce qui permet de montrer que $H^4(X_q, \mathcal{K}_5)$ est isomorphe à son image dans le groupe $K^1 X_q^{(4)}$ par le morphisme donné par la suite spectale de Brown–Gersten–Quillen, et donc que la différentielle $d_2^{2,-4}$ est nulle dans cette même suite spectrale.

5. Démonstration du Théorème 1.1

Les suites spectrales de coniveau et des « poids » en poids 3 permettent de montrer la surjectivité du morphisme naturel de $K_3(F)$ vers $H^0(X_q, \mathcal{K}_3)$, ce qui implique la nullité de la différentielle $d_2^{0,-3}$ dans la suite spectrale de Brown–Gersten–Quillen. Cela donne (sachant que $d_2^{2,-4} = 0$) un isomorphisme entre $K_2 X_q^{(2/3)}$ et $H^2(X_q, \mathcal{K}_4)$.

Enfin, les isomorphismes de la Proposition 4.2 fournissent une surjection $K_2 F \oplus K_2 D \to K_2 X_q^{(2/3)}$. Or $F(Y)$ (corps des fonctions de la variété de Severi–Brauer de D) déploie D, et $K_2 F$ s'injecte dans $K_2 F(Y)$. Cela implique que $SK_2 D$ coïncide avec $\ker(K_2 D \to K_2 D_{F(Y)})$ et donc que la suite $SK_2 D \to K_2 X_q^{(2/3)} \to K_2(X_q)_{F(Y)}^{(2/3)}$ est exacte. A l'aide du Théorème 2.1, on obtient la suite exacte $SK_2 D \to H^5(F, \mathbf{Z}/2) \to H^5(F(q), \mathbf{Z}/2)$.

Ainsi que dans [5], en utilisant une sous forme quadratique q' de q de codimension 1, il est possible de montrer que le noyau du morphisme $SK_2 D \to H^5(F, \mathbf{Z}/2)$ est un quotient du noyau de la norme $N_{q'} : H^3(X_{q'}, \mathcal{K}_5) \to K_2 F$. Cela s'obtient en faisant un travail similaire, mais plus simple, de calcul d'une partie de la filtration topologique de la K-théorie de la variété $X_{q'}$, puis en suivant la fonctorialité (contravariante) de la K-théorie des variétés sur la décomposition de Panin. Cela fournit la suite exacte (1).

Remerciements

Je remercie Bruno Kahn, Philippe Gille et Jean-Louis Colliot-Thélène pour leur aide et leurs remarques sur ce résultat et sa démonstration.

Références

[1] A. Blanchet, Function fields of generalized Brauer–Severi varieties, Comm. Algebra 1 (19) (1991) 97–118.
[2] B. Calmès, SK_2 d'une algèbre de biquaternions et cohomologie galoisienne, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2002.
[3] V. Chernousov, A.S. Merkurjev, R-equivalence in Spinor groups, J. Amer. Math. Soc. 14 (3) (2001) 509–534.
[4] B. Kahn, Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties, in: Proc. Symp. Pure Math., Vol. 67, 1999, pp. 149–174.
[5] A.S. Merkurjev, K-theory of simple algebras, in: W. Jacob, A. Rosenberg (Eds.), K-theory and Algebraic Geometry: Connections with Quadratic Forms and Division Algebras, Vol. 1, in: Proc. Symp. Pure Math., Vol. 58, 1995, pp. 65–83.
[6] I.A. Panin, On the algebraic K-theory of twisted flag varieties, K-theory 8 (6) (1994) 541–585.
[7] M. Rost, On the spinor norm and $A_0(X, K_1)$ for quadrics, Prépublication, 1988.
[8] A.A. Suslin, Torsion in K_2 of fields, K-Theory 1 (1987) 5–29.
[9] R.G. Swan, K-theory of quadric hypersurfaces, Ann. Math. 122 (1985) 113–153.
[10] V. Voevodsky, Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$ coefficients, Publ. Math. I.H.E.S., 2002, a paraître.