

CALCUL DIFFÉRENTIEL 2

FICHE 2: COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1. Montrer qu'une courbe donnée en coordonnées polaires par $r(t)$ et $\theta(t)$ où ρ et θ sont \mathcal{C}^1 , la longueur d'un arc de cette courbe est donné par

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(r')^2 + (\theta')^2 r^2}.$$

Calculer la longueur de l'arc de spirale logarithmique $r(\theta) = ae^\theta$ sur un intervalle borné (avec $a > 0$). En déduire que la longueur totale de l'arc entre $-\infty$ et 0 est finie, et donner sa constante de proportionnalité à a .

Exercice 2. Calculer

- (1) la longueur de la cardioïde d'équation polaire $r = 2(1 - \cos(\theta))$;
- (2) la longueur de l'astroïde d'équation $x = \cos^3(t)$ et $y = \sin^3(t)$;
- (3) la longueur de l'arc de parabole $y = x^2$ entre $x = a$ et $x = b$.

Exercice 3. Montrer les formules du cours

$$f'(t) = \|f'(t)\|\tau(t), \quad f''(t) = \left(\frac{f'(t) \cdot f''(t)}{\|f'(t)\|} \right) \tau(t) + \bar{\rho}(t)\|f'(t)\|^2\nu(t)$$

et

$$\bar{\rho}(t) = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3}$$

où f est une courbe \mathcal{C}^2 , τ et ν sont les vecteurs du repère de Frenet et $\bar{\rho}$ est la courbure algébrique.

Exercice 4 (Hélices). Une courbe paramétrée \mathcal{C}^1 régulière dans \mathbb{R}^3 est appelée une *hélice* si ses tangentes ont un angle constant avec une direction fixe, alors appelée *axe* de l'hélice. Supposons que f est une courbe paramétrée \mathcal{C}^2 dans \mathbb{R}^3 , de courbure et de torsion partout non nulles. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1) f est une hélice;
- (2) les normales principales sont parallèles à un plan fixe;
- (3) les binormales font un angle constant avec une direction fixe;
- (4) la fonction θ/ρ est constante.

Exercice 5. On considère l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Trouver le lieu des projetés orthogonaux de l'origine sur les tangentes à cette hyperbole. Ce lieu est parfois appelé "podaire".

Exercice 6. Calculer la courbure d'une ellipse en chacun de ses points. Trouver les points où elle est maximale et ceux où elle est minimale.

